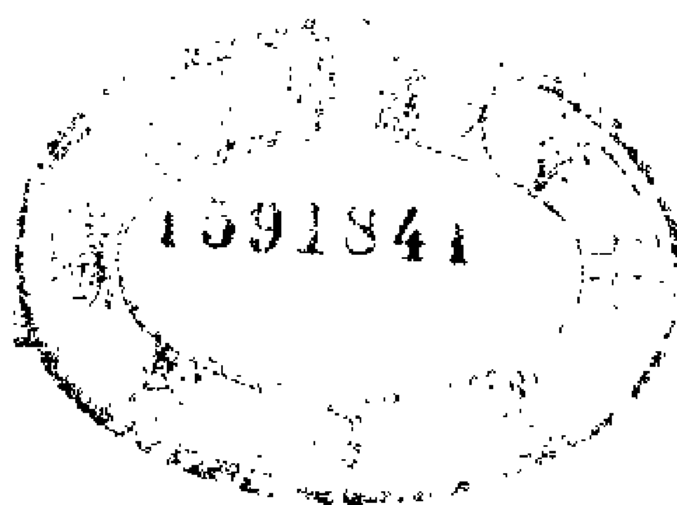
图论概要

杨炳儒 编著



天津科学技术出版社

前　　言

图论是组合数学与离散数学的重要一支，是富有趣味和应用极为广泛的一门学科，是研究自然科学、工程技术、经济管理和社会问题的一个重要的数学工具。

本书以图表等形式汇集了包括一些较新研究成果的图论的基本理论。力图体现：理论结构清晰，内容融汇完备，概念定理对照，例题解法典型，算法应用俱全等特点。

读者可以此书为线索，尽快地了解图论基本理论的框架，然后参考有关书籍对照学习并做相应的习题，即可掌握本门学科的基础知识、基本技能和基本技巧，进而追逐文献深入探究。

本书可供高等院校有关专业师生，有关图论的教学、科研人员参考、查阅。

南京邮电学院的余世樑副教授仔细地校阅了本书的原稿，并对其中的内容提出许多有益的建议。安徽大学的张良震教授、北京工业学院的王遇科教授、辽宁大学的洪声贵教授和复旦大学的李为鉴副教授对于本书也给予很大的帮助，在此一并致谢！

杨炳儒

1985.1

目　　录

#《总体结构图》

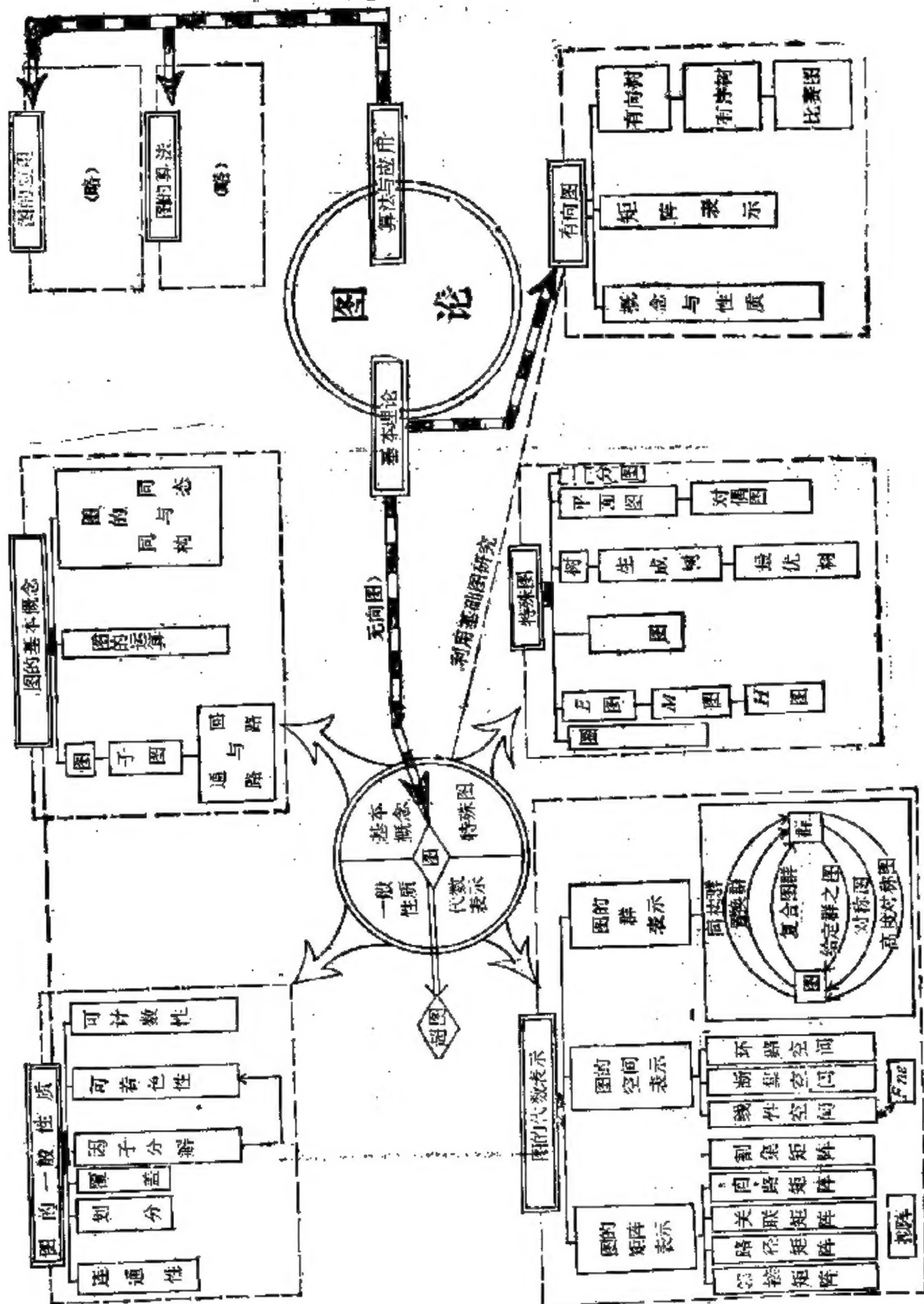
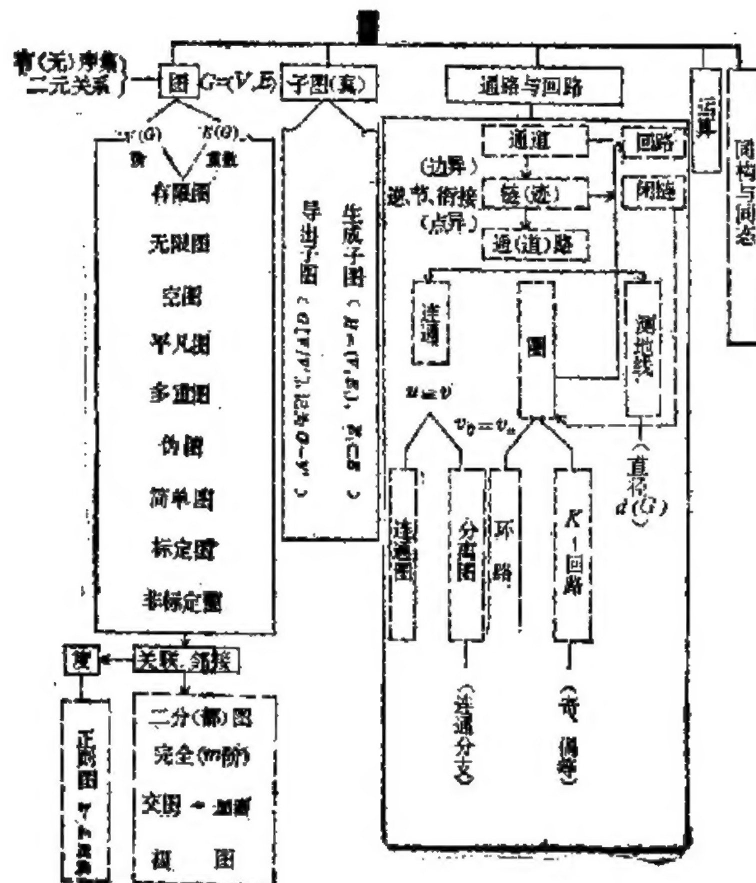


图
论
算法与应用
基本理论
有向图
有向树
比赛图
矩阵表示
概念与性质
无向图
利用基础图研究
图的基本概念
图的运算
图的同构
子图
通路与回路
特殊图
平面图
对偶图
树
生成树
最优树
E图
M图
H图
基本概念
特殊图
一般性质
代数表示
超图
图的一般性质
可计数性
可着色性
因子分解
覆盖
划分
连通性
图的代数表示
图的群表示
图的空间表示
环路空间
断集空间
图的矩阵表示
关联矩阵
通路矩阵

一、图的基本概念

（一）结　　构



有（无）序集
二元关系
图
$G=(V,E)$
子图（真）
通路与回路
运算
同构与同态
有限图
无限图
空图
平凡图
多重图
伪图
简单图
标定图
非标定图
导出子图
生成子图
通道
回路
（边异）
链（迹）
闭链
（点异）
通（道）路
连通
圈
测地线
直径 $d(G)$
连通图
分离图
环路
K-回路
关联、邻接
度
正则图
二分（部）图
完全（n阶）
交图
补图
（连通分支）
（奇、偶）

（二）概　念

1. 图

(1) 图：一个图G定义为一个偶对（V，E），记作$G=(V, E)$，其中 1）V是一个非空集合，它的元素称为顶点；2）E是无序积$V\&V$的一个子集，其元素称为边（线）。集合$V\&V$中的元素可在E中出现不止一次。（分别用$V(G)$和$E(G)$表示图G的顶点集和边集，分别用n_V（或P、v）和n_e（或q、ε）表示顶点数和边数）。

若U是有序积$V\times V$的一个子集（其元素称为弧），则$D=(V, U)$称为有向图。

(2) 有（无）限图：

若$V(G)$和$E(G)$都是有限集合，则G称为有限图，否则称为无限图。

空图：没有任何边的图称为空图（记作ϕ）。

平凡图：只有一个顶点的图称为平凡图。

(3) 阶：图中顶点的个数叫做图的阶。

重数：连接两个相同顶点的边的条数叫做边的重数。

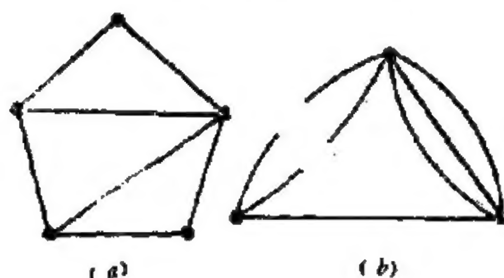
多重边（平行边）：重数大于1的边称为多重边（平行边）。

环：指图中一顶点与它自己联结的边。

(4) 简单图：无环且无重数大于1的边的图称为简单图（图1.1(a)）。

多重图：无环且有重数大于1的边的图称为多重图（图1.1(b)）。

伪图：含有环与多重边的图称为伪图（图1.2）。



(a)　　(b)

图　1.1

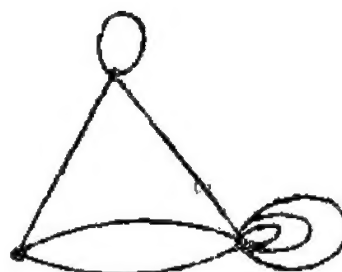


图　1.2

(5) 非标定图：所有的图的集合，按照同构关系（见后5）划分成等价类，每一个这样的等价类称为一个非标定图；所有的图的集合，对于图的同构关系构成一个商集。

标定图：如前面（1）中定义的图。

(6) 关联：一条边的端点称为与这条边关联；反之，一条边称为与它的端点关联。

邻接：与同一条边关联的两个端点称为邻接；若二边有一公共的顶点，则称此二边邻接。

孤立点：若V中某顶点和E中任何边都不关联，则该顶点称为孤立点。

(7) 完全图：每一对不同的顶点均有一条边相连的简单图称为完全图。n阶完全图记作K_n（图1.3）。

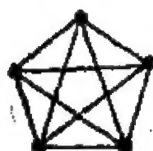


图　1.3

二分(部)图：若图的顶点能分成二个集合V_1和V_2，使得同一集合中的任何两个顶点都不邻接，则称此图为二分（部）图或双图，记作$G=(V_1, V_2, E)$。这样一个把顶点分成二个集合V_1和V_2的分划(V_1, V_2)称为图的一个二分划。

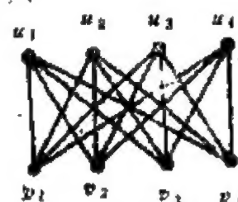


图 1.4

完全二分图：是一个具有二分划(V_1, V_2)的简单二分图，其中V_1的每个顶点与V_2的每个顶点都相连，若$|V_1|=m$，$|V_2|=n$，则此图记作$K_{m,n}$（图1.4）。

(8) 度（次数）：设$v\in V(G)$，G中与顶点v关联的边的条数称为v（在G中）的度或次数，记作$d_G(v)$，简记作$d(v)$。（按$d(v)$之奇、偶分别称v为奇、偶顶点）；并记$\Delta(G)=\max\{\deg v|v\in V(G)\}$，$\delta(G)=\min\{\deg v|v\in V(G)\}$。

(9) 正则图：若一个图的每一个顶点都具有相同的度，则称这个图是正则的。每个顶点的度均为K的正则图称为K—正则图（图1.5）。

(10) 交图：令S是一个集，$F=\{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$是$S$的不同的非空子集的一个非空族，这些子集的并是$S$。$F$的交图，记作$\Omega(F)$，定义为$V(\Omega(F))=F$，当$i\neq j$且$S_i\cap S_j\neq\phi$时$S_i$与$S_j$邻接。若存在$S$的子集的一个族$F$，对于这个族，$G\cong\Omega(F)$，就称图$G$是$S$上的一个交图。（“$\cong$”见后(20)）

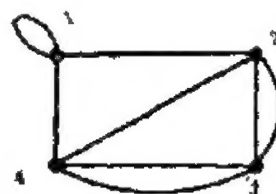


图 1.5

团：一个图的一个团是一个最大的完全子图（参见(12)）。

团图：一个给定的图G的团图是G的团的族的交图（每个团视为它的点的集(图1.6)。

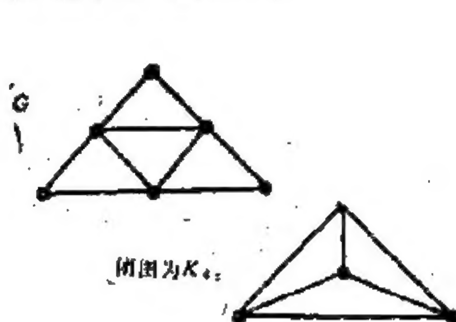
(11) 极图：有禁用子图的图称为极图。

2. 子图

(12) 子图：图H是G的子图，写作$H\subseteq G$，若$V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，且H中边的重数不能超过G中对应边的重数。

真子图：设$H\subseteq G$，若下列条件至少有一个成立：(1°)$V(H)\subset V(G)$；(2°)$E(H)\subset E(G)$；(3°)H中至少有一条边的重数小于G中对应边的重数，则称H是G的真子图。

(13) 生成子图：设图$G=(V, E)$。一个满足$H=(V, E_1)$，$E_1\subset E$的真子图，叫做G的生成子图（图1.7）。



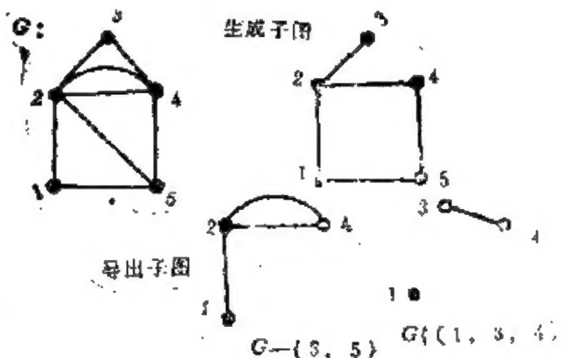


图 1.6　　　　图 1.7

(14) 导出子图：设V'是图$G=(V, E)$的顶点集合V的一个非空子集，以V'作为顶点

集，以两端点均在V'中的边的全体为边集的子图，称为由V'导出的G的子图，记作$G[V']$，称$G[V']$是G的导出子图（图1.7）。

导出子图$G[V/V']$（记为$G-V'$）：是从G中去掉V'中的顶点以及与其相关联的边所得到的子图。

3．通路与回路

（15）通道：一个图G的一条通道是顶点与边的一个交替序列v_0，e_1，v_1，…，v_{n-1}，e_n，v，它以顶点为起、终且每条边关联于直接在其前后的两个顶点。$v_0=v$时称为闭的，否则它就称为开的。

迹（链）：上述序列中所有的边都不相同时称为一条迹（链）。（长度为正的、起终点重合的链称为闭链）（图1.8）。

通路（道路）：所有的顶点都不相同的链称为通路（道路）（图1.8）。

（16）连通：设u、v为图G的二个顶点，若在G中存在一条（u，v）通路，则称顶点u和v是连通的。（示为$u\equiv v$；此关系为一等价关系）。

连通图：若对图中每一对不同的顶点u，v都有一条（u，v）通路，则称G为连通图（联接图）；否则称为非连通图（非联接图）或分离图（图1.9）。

连通分支：按等价关系$u\equiv v$便确定顶点集V的一个分类，把V分成非空子集V_1，V_2，…，V_p，使得当且仅当两个顶点u和v属于同一子集V_i时，它们才是连通的。子图$G[V_1]$，$G[V_2]$…，$G[V_p]$称为G的连通分支或简称分支。

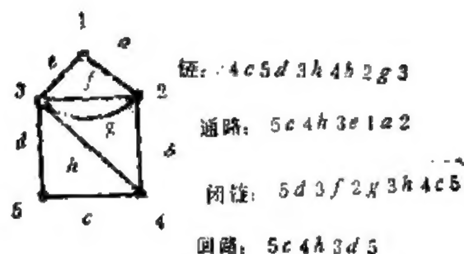


图 1.8

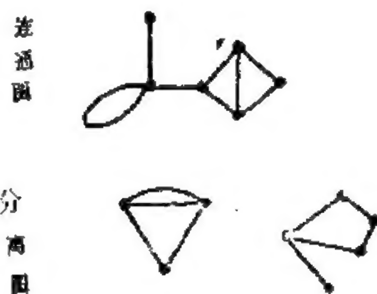


图 1.9

（17）回路：起点与终点重合的路叫做回路（图1.8）。

圈：起点与终点重合的通路叫做圈（有的亦称回路）。

环路：回路与回路的边不重并称为环路；长为K的回路称为K-回路。按K是奇数还是偶数，称K-回路是奇回路或是偶回路；3-回路称为三角形。

（18）长度：通道$v_0v_1\cdots v_n$中边的数目n称为它的长度。

围长：一个图G中最短的圈的长度称为G的围长，记作$g(G)$。

周长：G中任何一个最长的圈的长度称为G的周长，记作$C(G)$。

距离：对于G中的两个顶点u与v，当存在联结u和v的道路时，这种道路中最短的道路的长度称为u与v之间的距离，记作$d(u,v)$。若不存在联结u和v的道路，则$d(u,v)=\infty$。

(19) 测地线：一条最短的 $u-v$ 道路称为一条测地线。

直径：一个连通图 G 中任何一条最长的测地线的长度叫做 G 的直径 $d(G)$。

4. 运算

名称	表示	定义	图例
(1)并	$G_1 \cup G_2$	由 G_1 和 G_2 中的所有边组成的图。	G_1　G_2　$G_1 \cup G_2$
(2)交	$G_1 \cap G_2$	由 G_1 和 G_2 的公共边组成的图	$(G_1 \cap G_2)$
(3)补	$\overline{G}(G^c)$	设图 $G=(V,E)$，集合 $E_1=\{(u,v)\mid u\neq v,\ u,v\in V\}$，则图 $H=(V,E_1-E)$ 称为 G 之补图	(G)　$(\overline{G})$
(4)差	G_1-G_2	由 G_1 中去掉 G_2 中的边组成的图。	(G_1-G_2)
(5)环和	$G_1\oplus G_2$	在 G_1 与 G_2 的并中去掉 G_1 与 G_2 的交所得之图。	$(G_1\oplus G_2)$

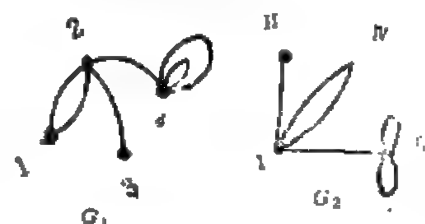
名称	表　示	定　　义	图　　例
(6)联	G_1+G_2	由$G_1\cup G_2$和所有的联结V_1和V_2的边所组成的图。(完全n部图：$K=\bar{K}_{p_1}+\bar{K}_{p_2}+\cdots+\bar{K}_{p_n}$)。	1, 2 G_1；3, 4, 5 G_2；1, 2, 3, 4, 5 (G_1+G_2)
(7)数乘	nG	由n个与G同构的支构成的图。	略
(8)积	$G_1\times G_2$	考虑$V=V_1\times V_2$中的任意两点$u=(u_1,u_2)$和$v=(v_1,v_2)$，当[$u_1=v_1$及$u_2\,\mathrm{adj}\,v_2$]或[$u_2=v_2$及$u_1\,\mathrm{adj}\,v_1$]时u和v在$G=G_1\times G_2$中邻接。	(u_1,u_2) (u_1,v_2) (u_1,w_2)；(v_1,u_2) (v_1,v_2) (v_1,w_2)；($G_1\times G_2$)
	$G_1\cdot G_2$	将G_1的任意一点与G_2的任意一点等同起来只产生唯一的图（直至同构）。	略
(9)合成	$G_1[G_2]$	以$V=V_1\times V_2$为其点集，而$u=(u_1,u_2)$和$v=(v_1,v_2)$当[$u_1\,\mathrm{adj}\,v_1$]或[$u_1=v_1$及$u_2\,\mathrm{adj}\,v_2$]时邻接	(u_1,u_2) (u_1,v_2) (u_1,w_2)；(v_1,u_2) (v_1,v_2) (v_1,w_2)；($G_1[G_2]$)

续表

名称	表 示	定 义	图 例
(10)幂	G^2	它有$V(G^2)=V(G)$且当u、v在G中$d(u,v)\leq 2$时，u和v在G^2中邻接．(类似地可定义G^3，G^4，…)．	略

5．同构与同态

(20) 同构：设有两个图$G_1=(V_1,\ E_1)$和$G_2=(V_2,\ E_2)$，它们的顶点集间有一一对应的关系，使得边之间有如下的关系：设$u_1\leftrightarrow u_2$，$v_1\leftrightarrow v_2$，u_1，$v_1\in V_1$；u_2、$v_2\in V_2$；若$(u_1,\ v_1)\in E_1$，则$(u_2,\ v_2)\in E_2$，而且$(u_1,\ v_1)$的重数与$(u_2,\ v_2)$的重数相同，这种对应叫做同构，记作$G_1\cong G_2$（图1.10）．



$G_1\cong G_2$

图 1.10

(21) 运算1：把图的割点（见后面二(二)-(1)）分裂为两个顶点，使图成为两个不连通的子图。

运算2：把图中两个顶点分裂开，如把顶点x分裂为x_1和x_2，把顶点y分裂为y_1和y_2，于是图G分为两个子图g_1和g_2。设x_1、y_1在g_1中，x_2、y_2在g_2中；这时若把x_1和y_2，x_2和y_1结合在一起，则g_1和g_2两图又重新这样连接起来，将获得一个新图。

(22) 1-同构：两个图G_1和G_2，若应用运算1方法进行运算，能使之成为同构图，则称它们互为1-同构（图1.11）。

2-同构：两个图G_1和G_2，若应用运算1或运算2方法进行运算（也可同时进行），能使之成为同构图，则称它们互为2-同构(图1.12)．

(23) 零度：设G为有n_e条边，n_v个顶点的连通图，称n_e-n_v+1为图G的零度(或环秩)，记作$N(G)$．(分离图为n_e-n_v+p)。

秩：一个具有n_v个顶点的连通图G，定义n_v-1为图G的秩（分离图为n_v-P）．

(24) 初等同态：是将两个不邻接的顶点等同起来。

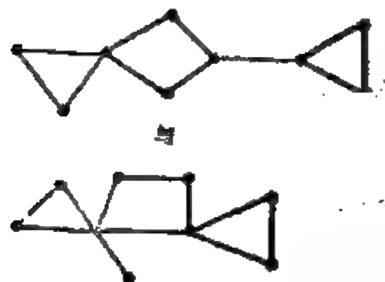


图 1.11

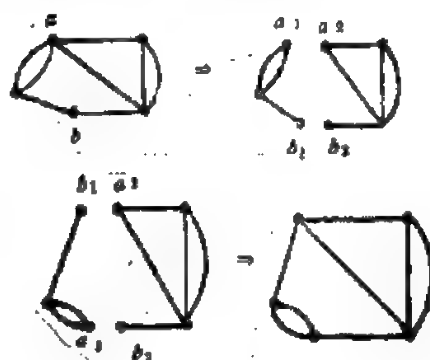


图 1.12

同态：G的一个同态是一系列初等同态。若G'是由G经过一个同态ϕ得到的图，我们可

将ϕ看作是从V到V'上的一个函数，使得若u和v在G中是邻接的，则ϕ_u和ϕ_v在G'中邻接。此时，称ϕ是G到G'上的一个同态，G'是G的一个同态象，且记$G'=\phi G$。（注意，每一个同构是一个同态）。（图1.13）

n阶完全的同态：G的一个同态若有$\phi G=K_n$，则称是n阶完全的。

（25）着色、n-着色、完全着色、消色数$\psi(G)$、色数$\chi(G)$等均见后面的二(二)－(V)。

道路P_4的4个同态象：

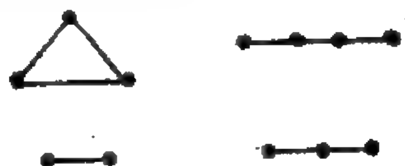


图 1.13

（三）定 理

1. 图

（1）（关于极图）所有有p个点而没有三角形的图中最多有$[p^2/4]$条边）即$ex(p, k_3)=[p^2/4]$)。

另 $ex(p, C_p)=1+(p-1)(p-2)/2$;

$ex(p, K_4-x)=[p^2/4]$;

$ex(p, K_{1,3}+x)=[p^2/4]$;

$$ex(p, K_n)=\frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)}+\binom{r}{2},$$

（其中，$n\leqslant p$，$p\equiv r\ (\mathrm{mod}(n-1))$且$0\leqslant r<n-1$，

（2）每个无限图含有$\aleph_0$个互相邻接的点或者$\aleph_0$个互相不邻接的点。

（3）一个图G有q条边$\Longrightarrow \sum_{v\in V}d(v)=2q$。

（4）任何图$G\Longrightarrow$有偶数个奇数点。

（5）图G是一个双图$\Longleftrightarrow$它的所有圈的长度是偶数。

（6）每一个图都是一个交图。

（7）$G(p, q)$是连通的，且$p\geqslant 3\Longrightarrow \omega(G)\leqslant q$。（其中$\omega(G)$称为$G$的交数，它是构成一个集$S$所需要的最少的元素的数目，而使得$G$是$S$上的一个交图）。

（8）G有p_0个孤立点，且没有K_2支$\Longrightarrow \omega(G)\leqslant q+p_0$。

（9）G是一个有$p>3$个顶点的连通图，$\omega(G)=q\Longleftrightarrow G$中没有三角形。

（10）任一有$p\geqslant 4$个顶点的图$G\Rightarrow \omega(G)\leqslant[p^2/4]$。

（11）一个图G是一个团图$\Longleftrightarrow$它含有完全子图的一个族F，它们的并是G，且若F的某个子族F'中每一对完全子图的交非空，则F'的所有元素的交就非空。

2. 子图

（12）图G中所有不同的子图的个数是2^{p+q}个（包括图G和空图）。

3. 通路与回路

(13) 图P是一通路$\Longleftrightarrow P$中有两个顶点的度为1，而其余顶点的度均为2。

(14) G是不连通的$\Longrightarrow \bar{G}$连通。

(15) 任一闭链必为回路和回路的边不重并。

(16) 闭链为一回路$\Longleftrightarrow$它是最小闭链（即其中并不真包含其它闭链）。

(17) G是二分图$\Longleftrightarrow G$中无奇回路。

4. 运算

5. 同构与同态

(18) 同构关系是一个等价关系。

(19) 图G_1与图G_2同构$\Longleftrightarrow$存在一置换矩阵P，使$D_1=PD_2P$(D_1、D_2分别为G_1、G_2之邻接矩阵；G_1与G_2无平行边)，（邻接矩阵见后面的三（二）-（1））。

(20) （Ulam猜想）令G有p个点v_i，H有p个点u_i，$p\geqslant 3$．对每个i，子图$G_i=G-v_i$与$H_i=H-u_i$同构$\Longrightarrow$图G与H同构（该猜想已在树的情形及比赛图的情形下，部分地解决了）．

(21) 对任一图G和G的任一初等同态$\varepsilon \Longrightarrow \chi(G)\leqslant\chi(\varepsilon G)\leqslant 1+\chi(G)$。

(22) 对G的任何一个同态$\phi \Longrightarrow \chi(G)\leqslant\chi(\phi G)$。

(23) 对任一图G和G的任一初等同态$\varepsilon \Longrightarrow \psi(G)-2\leqslant\psi(\varepsilon G)\leqslant\psi(G)$。

(24) 对任一图G和任一在χ和Ψ之间的整数$n \Longrightarrow$存在G的一个n阶完全同态(从而存在一个完全着色)．

(25) 图G_1和G_2是1-同构$\Rightarrow G_1$的秩等于G_2的秩；G_1的零度等于G_2的零度。

6. E. P. Ramsey 定理

（Ramsey数）已给n-集S（$|S|=n$），及正整数t，g_1，g_2，…，g_t，r，满足条件

$$g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_t\geqslant r\geqslant 1\cdots\cdots(*)$$

在S中作所有r个元素的子集合构集合$P_r(S)$，将$P_r(S)$作t个子集的划分：

$$P_r(S)=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t\cdots\cdots(**)$$

设在原集合S中存在q_i-子集S_i($|S_i|=q_i$)，使S_i中所有r个元素的子集合，全含在A_i内，则称S包含子集合（q_i，A_i）或称存在子集合（q_i，A_i），

设存在最小正整数$N(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t;\ r)$使当

$$n\geqslant N(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t;\ r)$$

时至少存在一个子集合（q_i，A_i），则称此最小的正整数$N(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t;\ r)$为Ramsey数。

(26) （Ramsey定理）已给n-集S及正整数q_1，q_2，…，q_t，r，满足条件（*）$\Rightarrow$恒存在一个极小正整数N（q_1，q_2，…，q_t；r）；使当$n\geqslant N(q_1,q_2,\cdots,q_t;r)$时，将$P_r(S)$作分划（**），则在集合$S$里，将存在子集（$q_i$，$A_i$），其中$i$是1，2，…，$t$中的某个数．

【Ramsey 定理的应用】

(27) 在平面上任给5点，无3点共线$\Longrightarrow$在此5点中，必存在4点，构成一个凸四边形。

(28) 在平面上，任给m点，无三点共线．由此m点所可能构成的一切四边形，都是凸四边形$\Longrightarrow$原给的m点，构成一个凸m点形。

(29) 任给正整数m，作n阶（0，1）一矩阵，当n充分大时$\Longrightarrow$在此矩阵中，必含

一个n阶主子矩阵，是以下四种形式之一：

$$\begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & * \end{bmatrix}$$

(30) 设$q_1,\ q_2 \geq 2 \longrightarrow N(q_1,\ q_2;\ 2) \leq N(q_1-1,\ q_2;\ 2)+N(q_1,\ q_2-1;\ 2)$。

(31) $N(q_1-1,\ q_2;\ 2)$ 与$N(q_1,\ q_2-1;\ 2)$ 都是偶数$\Longrightarrow$

$N(q_1,\ q_2;\ 2) < N(q_1-1,\ q_2;\ 2)+N(q_1,\ q_2-1;\ 2)$

(32) $N(q_1,\ q_2;\ 2) \leq \binom{q_1+q_2-2}{q_1-1}$

(33) (Erdös[1947]) $N(K,\ K;\ 2) \geq 2^{K/2}$。

(34) $N(3,\ 3;\ 2)=6$。

(35) $N(3,\ 4;\ 2)=9$。

(36) $N(3,\ 5;\ 2)=14$。

(37) $N(4,\ 4;\ 2)=18$。

(38) $N(3,\ 6;\ 2)=18$。

(39) 已知的Ramsey 数：

$N(q_1,\ q_2;\ 2)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18			
5	1	5	14				
6	1	6	18				
7	1	7	23				

$N(3,\ 3,\ 3;\ 2)=17$，

$N(3,\ 3,\ 3,\ 3;\ 2)=65$，

……

(40) 关于Ramsey 数$N(k,\ l,\ 2)$的确定，最新成果有：

$k \backslash l$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4		18	28	44	66
5			55	94	153
6				173	322
7					626

（四）题　解

1．图-通路与回路

（1）找出右图(图1.14)中：①从顶点A到顶点F的所有的通路；②从A到F的所有的的迹；③A和F之间的距离；④这个图的直径．

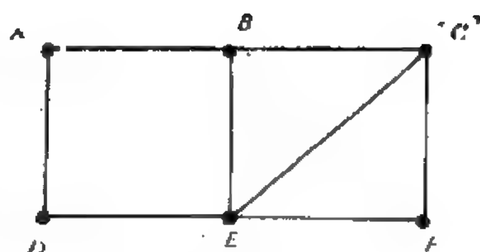


图 1.14

解：①从A到F的路是一条通道，它没有重复的顶点，也没有重复的边．有7条这样的通路：（A，B，C，F），（A，D，E，F），（A，B，C，E，F），（A，D，E，B，C，F），（A，B，E，F），（A，D，E，C，F），（A，B，E，C，F）．

②从A到F的一条迹是一条通道，它的边没有重复．有9条这样的迹，它们是①中的7条路加上．

（A，D，E，B，C，E，F）和（A，D，E，C，B，E，F）．

③从A到F的距离是3，因为有一条从A到F的长度为3的路，即（A，B，C，F），而没有从A到F的更短的路．

④任何两点之间的距离不大于3，A和F之间的距离是3；因此这个图的直径是3．

（2）下图（图1.15）中的哪些是连通的、无环的、简单图？

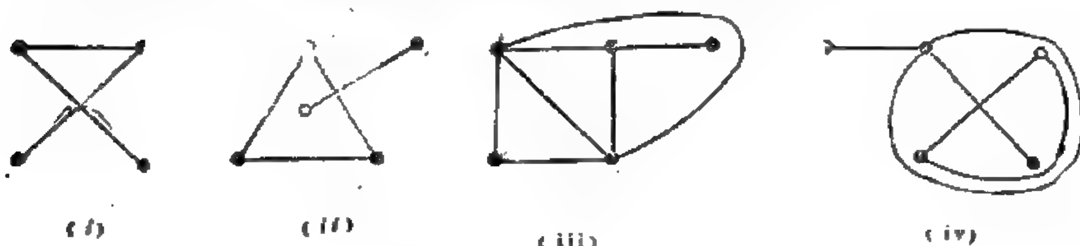


图 1.15

解：①仅（i）和（iii）是连通的；

②仅（iv）有一个环，即一条有相同端点的边；

③仅（i）和（ii）是简单图．图（iii）有多重边，图（iv）有多重边和一个环．

（3）试证：当且仅当有一条从u到v的通路时，存在着从顶点u到顶点v的一条通道．

证：因为每一条路是一个通道，所以我们仅需证明，若存在从u到v的一条通道W，则存在从u到v的一条通路．我们对W的长度施以归纳法证明．假设W的长度是1，即$W=$（u，v），则W是从u到v的一条通路．又设W的长度是$n>1$，即

$$W=(u=v_0,\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1},\ v=v_n).$$

若没有顶点被重复，则W是从u到v的一条路．没有一个顶点被重复，比如$v_i=v_j$，这里$i<j$．则

$$W'=(v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_i,\ v_{j+1},\ \cdots,\ v_n)$$

是长度小于n的从$u=v_0$到$v=v_n$的一条通道．根据归纳法，存在着从u到v的一条通路．

（4）证明：若G是简单的，则其边数

$$\varepsilon(G)\leqslant\binom{v}{2}.$$

证：因为 v 个顶点构成的完全图K_v的

$$\varepsilon(K_v)=\binom{v}{2};$$

另一方面，对 v 个顶点的简单图G显然有

$$\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(K_v),$$

故 $$\varepsilon(G)\leqslant\binom{v}{2}.$$

(5) 设 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上的一个点集，其中任意二点间的距离至少是1，证明至多有$3n$对点，每对点的距离恰好是1．

证：定义图$V(G)=\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$，当且仅当$x_i$与$x_j$的距离为1时，$x_i$与$x_j$间有边．由平面几何的知识易见$\Delta(G)\leqslant 6$．由$\sum_{i=1}^{n} d_i=2\varepsilon$知$2\varepsilon\leqslant\Delta\cdot n\leqslant 6n$，故$\varepsilon\leqslant 3n$，亦即至多有$3n$对点，对点，每对间的距离恰好是1．

(6) 试证：若G是简单图且$\delta\geqslant k$，则G有一条长为k的通路．

证：用反证法．设G中不含一条长为k的通路．不妨设$P=(v_1, v_2, \cdots, v_{t+1})$是$G$中最长的通路，其长度$t\leqslant k-1<k$．此时$v_1$与$P$以外的任何顶点均不能邻接，否则与$P$是最长的通路相矛盾．但这时$v_1$的次数最大只能是$t<K$与$\delta\geqslant K$相矛盾．

(7) 试证：在连通图G中任意两条最长的通路必有一个公共顶点．

证：用反证法．否则若G中有两条最长的通路P_1、P_2，无公共顶点．因G连通，故P_1上的任一点u与P_2上的任一点v必是连通的，不妨设u是(u, v)-通路上最后一个在P_1上的点，v是最先一个在P_2上的点，如下图（图1.16）所示：

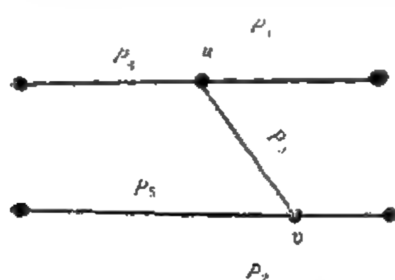


图 1.16

令(u, v)-通路为P_3，设最长通路的长为l．u将P_1分为两段，必有一段的长$\geqslant\frac{l}{2}$，设为P_4；同理v分P_2为两段，有一段设为P_5，其长$\geqslant\frac{l}{2}$．于是$|P_4+P_3+P_5|>l$，此与P_1、P_2最长相矛盾(此处"+"意指二通路相接)．

(8) 试证：对任何三个顶点$u, v, w\in V(G)$有

$d(u, v)+d(v, w)\geqslant d(u, w)$ 成立．

证：若u与v或v与w不连通，上述不等式显然成立．否则令最短的(u, v)-通路为P_1，最短的(v, w)-通路为P_2，则P_1与P_2相接所得途径含一条道路P_3为(u, w)-通路．由$d(u, w)$的定义得$|P_3|\geqslant d(u, w)$．

但 $$|P_3|=|P_1|+|P_2|=d(u, v)+d(v, w).$$

故 $$d(u, v)+d(v, w)\geqslant d(u, w).$$

(9) 证明：若G的直径大于3，则G^c的直径小于3．

证：若$u, v\in V(G)$在G中不邻接，则在G^c中邻接；故在G^c中，$d(u, v)=1$．若u, v在G中邻接，由于G的直径大于3，故总存在$w\in V(G)$，w与u、v皆不邻接．于是在G^c中，w与u、v邻接，故$d(u, v)=2<3$；所以对任意的$u, v\in V(G^c)$有$d(u, v)<3$．

由上得到：G^c的直径小于3．

（10）证明：若G是直径为2的简单图，且$\Delta=\nu-2$，则$\varepsilon\geqslant 2\nu-4$。

证：不失一般性，设G中顶点v_1有$d(v_1)=\nu-2$，则除一个顶点外，v_1必与其余顶点邻接；把不邻接的顶点记作v_ν，邻接点依次记为v_2，v_3，…，$v_{\nu-1}$，如下图（图1.17）所示：



图 1.17

v_ν必与v_2，…，$v_{\nu-1}$图4.17中至少一个顶点邻接，否则v_ν成为孤立点，与题设矛盾．不妨设v_ν与v_2邻接，但v_ν要与v_3距离不大于2，有两种可能：一种是v_ν与v_3邻接，另一种是v_3通过v_2，v_4，…，$v_{\nu-1}$中某一个与v_ν邻接的点构成到v_ν的长度为2的通路，即要保证v_ν与v_3距离不大于2，至少要增添一边．类似的理由，要保持v_ν与v_4，…，$v_{\nu-1}$中任何一顶点的距离不大于2，至少各要增添一边．

所以要使G的直径为2，至少保持由v_1发出的$\nu-2$条边及v_3，…，$v_{\nu-1}$各增添的一条边

故　　$\varepsilon\geqslant 2(\nu-2)=2\nu-4$．

（11）证明：若G是连通的简单图，但不是完备的，显然必有$\nu\geqslant 3$，则G有三个顶点u、v、w，使uv、$vw\in E$，而$uw\notin E$．

证：由于G是连通而不是完备的，故至少有一对点u、p不邻接；但由于G连通，故存在（u，p）-通路．若设Q为最短的（u，p）-通路，当其长为2时，可令$w=p$，v为Q上的内部顶点，u、v、w即为所求；否则当最短的（u，p）-通路长为$|Q|>2$时，$Q=(u, v_1, v_2, \cdots, p)$，$u$与$v_2$必不邻接，否则（$u$，$v_2\cdots$，$p$）将是比$Q$更短的（$u$，$p$）-通路，与假设矛盾．于是令$v=v_1$，$w=v_2$即为所求．

（12）证明：$\delta\geqslant 2$时，G有一条回路．

证：若G是非简单图，显然当$\delta\geqslant 2$时，G有回路．若G是简单图，任取一点$v_1\in V$，$d(v_1)\geqslant 2$，至少有一点，不妨设为v_2与v_1邻接．$d(v_2)\geqslant 2$至少有一个顶点，不妨设为v_3与v_2邻接，继续下去，由于G的顶点数有限，必有重复的顶点出现，即G有一条回路．

（13）证明：①围长为5的K-正则图至少有k^2+1个顶点；②围长为4的K-正则图至少有$2k$个顶点且（在同构意义下）在$2k$个顶点上恰好有一个这样的图．

证：①围长为5的图必为简单图，故对于任一$u\in V$，由于图是K-正则的，必恰好与K个顶点邻接．但K个顶点彼此间不能邻接，否则将出现一个回路；由是这K个顶点中的每一个又要与$K-1$个顶点邻接，且这些$K(K-1)$个点是互异的，否则将出现回路．这时图有$1+K+K(K-1)=K^2+1$个顶点．故围长为5的K-正则图至少有K^2+1个顶点．

②任取一顶点$v\in V$，图G的围为4，故必为简单图，又是K-正则的，故v与K个顶点v_1，…，v_K邻接且它们之间不再邻接，否则将出现一回路．G是K-正规的，故v_1应再与$K-1$个顶点u_1，u_2，…，u_{k-1}邻接，此时已有$K+1+K-1=2K$个顶点．所以$V(G)\geqslant 2K$．

在$2K$个顶点上的围长为4的K-正则图中，v与v_1，…，v_K邻接，v_1，…，v_K分别与u_1，…，u_{K-1}都邻接，即下图（图1.18）所示：

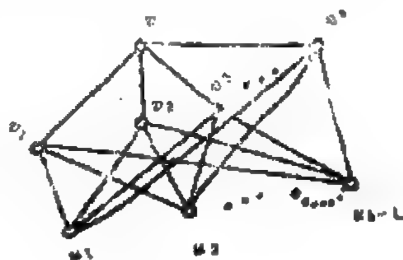


图 1.18

显然在同构意义下，满足题设的图只有这一种．

（14）证明：①若$\varepsilon\geqslant\nu$，则G有一条回路．

②若 $\varepsilon \geqslant \nu+4$，则$G$有两条边不重并的回路．

证：①对ν施归纳．$\nu=1$，$\varepsilon \geqslant \nu$显然$G$有一条回路．设结论对少于$\nu$个顶点的图$G$成立，并设$G$有$\nu \geqslant 2$个顶点，不妨设$G$是连通的．若$G$无回路，设$uv \in E$，因$uv$是$G$中唯一的$(u, v)$-通路，故$G-uv$不含$(u, v)$-通路，从而$G-uv$不连通．由结论：若$e \in E$，则$\omega(G) \leqslant \omega(G-e) \leqslant \omega(G)+1$，可知$\omega(G-uv)=2$．设$G-uv$的分支为$G_1$和$G_2$，$\nu(G)=\nu(G_1)+\nu(G_2)$，$\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)=\varepsilon(G)-1$．故必有$G_1$或$G_2$有$\nu(G_i) \leqslant \varepsilon(G_i)$（$i=1$或$2$）．不妨设$\varepsilon(G_1) \geqslant \nu(G_1)$，但$\nu(G_1)<\nu(G)$，由归纳法假设$G_1$中有一条回路，与$G$中无回路矛盾．

②若$\varepsilon \geqslant \nu+4$，而$G$无两条边不重并的回路．选具有这性质的一个最小的图，仍记作G．$\varepsilon(G) \geqslant \nu+4>\nu$．由①可知$G$中必有回路，不难证明$G$必须满足下列三个条件：

i）G的围长至少是5，否则将有两条边不重并的回路；

ii）$\delta(G) \geqslant 3$，否则将与G的最小性矛盾；

iii）$\nu(G) \leqslant 8$，因$2\varepsilon=2(\nu+4) \geqslant \delta\nu \geqslant 3\nu$，

$\therefore \nu \leqslant 8$．

但分别验证，$\nu=1, 2, \cdots, 8$的图，G不能同时满足上面的三个条件，与前述矛盾．故G有两条边不重并的回路．

2．图的同构

（15）证明下面两个图（图1.19）不同构

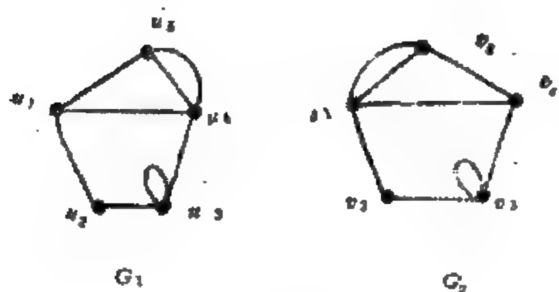


图 1.19

证：否则，若G_1与G_2同构，由同构的定义知同构对应保持邻接性，于是与圈关联的结点必须与具有同样性质的点对应，且对应点关联的边数必相同．因此必有$u_3 \leftrightarrow v_3$，u_4在G_1中与u_3邻接，故对应点只能是v_2或v_4，但与u_4关联的边有4条，而与v_2、v_4关联的边分别为2条与3条，引出矛盾．故G_1与G_2不同构．

（16）证明两个简单图G和H同构的充要条件是存在一个可逆的一一对应θ：$V(G) \to V(H)$，使得当且仅当$\theta(u)\theta(v) \in E(H)$时，$uv \in E(G)$．

证：“$\Rightarrow$”显然．

“$\Leftarrow$”首先由θ定义ϕ：$E(G) \to E(H)$如下：$uv \in E(G)$与$\theta(u)\theta(v) \in E(H)$对应．由于$G$和$H$均为简单图，故$\phi$是一个可逆的一一对应．且有$\psi_G(e)=uv$的充要条件是$\psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$，因此由定义可得$G \cong H$．

（17）证明在四个顶点上的非同构的简单图有11种．

证：因为若$G \cong H$，则$\nu(G)=\nu(H)$，$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$．于是分别研究$\nu=4$，$\varepsilon=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$的图，不难证明在四个顶点上的非同构的简单图有（见图1.20）：

（18）①画出K_n^c和$K_{m,n}^c$；

②若G是自补的，则$\nu \equiv 0, 1 \pmod 4$．

证：①K_n^c为具有n个顶点的空图，共n个顶点；$K_{m,n}^c$为分别具有m个顶点和n个顶点的两个完全图结合而成的图．

②G是自补的，即$G\cong G^c$，

$\therefore \varepsilon(G)=\varepsilon(G^c)$，

又$\varepsilon(G)+\varepsilon(G^c)=C_v^2$

即$v(v-1)=4\varepsilon(G)$

$\therefore v=0,\ 1 \pmod 4$.

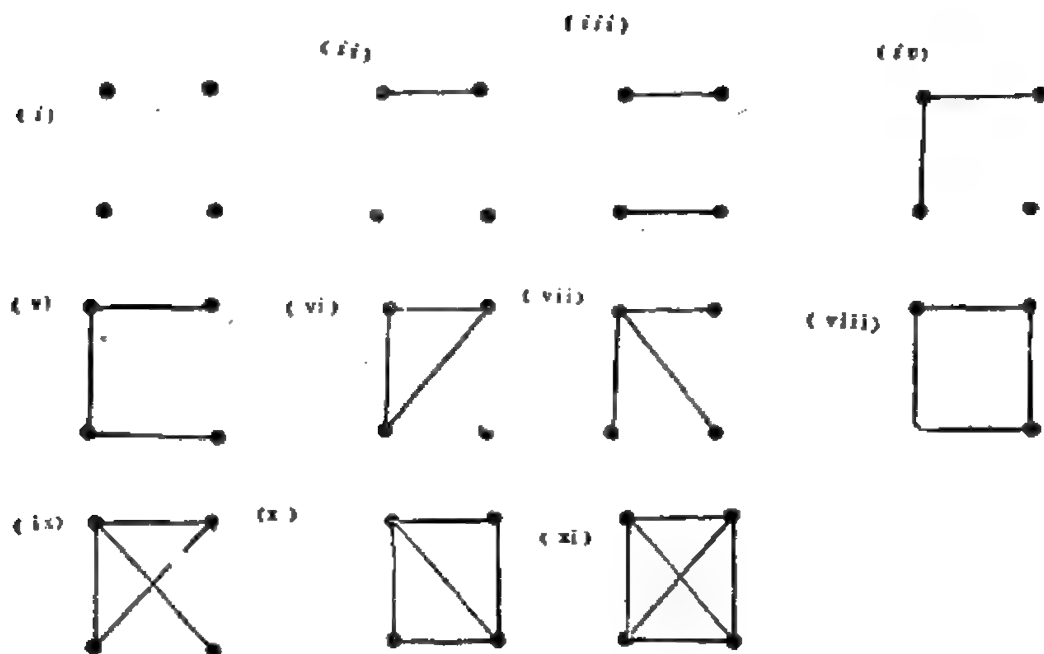


图 1.20

(19) ①利用上面题(16) 的结果证明简单图G的一个自同构可以认为是在V上的一个保持邻接性的置换．这种置换集在通常的合成运算下，形成一个群$\Gamma(G)$；

②找出$\Gamma(K_n)$ 和$\Gamma(K_{m,n})$；

③找出一个非平凡的简单图使它的自同构群是自身；

④证明对任何简单图G成立$\Gamma(G)=\Gamma(G^c)$；

⑤研究具有元素（1）（2）（3），（1，2，3）和（1，3，2）的置换群A，证明不存在具有顶点集｛1，2，3｝的简单图G使$\Gamma(G)\cong A$；

⑥找出一个简单图G使$\Gamma(G)\cong A$．

证：①由题（16）及自同构的定义和群的定义可直接证明（略）．

②$\Gamma(K_n)$ 为n个数字所有的置换所组成的群，即$\Gamma(K_n)\cong A_n$，A_n为n个数字的置换组成的置换群。

$\Gamma(K_{m,n})$ 为若$Q\in\Gamma(K_{m,n})$，则

$$\sigma:\begin{pmatrix}1\,2\cdots m & m+1\cdots & m+n\\ i_1 i_2\cdots i_m & j_{m+1}\cdots & j_{m+n}\end{pmatrix}$$其中（$i_1 i_2\cdots i_m$）是m个数字1，2，…，m的置换，（j_{m+1}，…，j_{m+n}）是（$m+1$，…，$m+n$）的一个置换．

③易证$\Gamma(G)$ 为单位元素．（见图1.21）



图 1.21

④因为图的自同构特殊邻接线及非邻接性，故由补图的定义知$\Gamma(G)=\Gamma(G^c)$。

⑤因为具有顶点集{1，2，3}的简单图，当为空图时，其$\Gamma(G)$为A_3，有6个元。有一条边时，$\Gamma(G)$具有2个顶，有两条边时，$\Gamma(G)$有2个元；有三条边时，$\Gamma(G)\cong A_3$，故不存在顶点集为{1，2，3}的简单图G使$\Gamma(G)\cong A$。

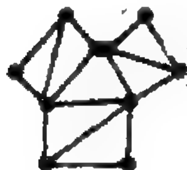


图 1.22

⑥易验证$\Gamma(G)\cong A$。（见图1.22）

(20) 设G是简单图，并设n是一个整数，$1<n<\nu-1$。试证若$\nu\geqslant 4$且G在n个顶点上的所有导出子图均有相同边数，则或$G\cong K_\nu$或$G\cong K_\nu^c$。

证：设G在n个顶点上的所有导出子图都有m条边，对任意两个顶点v_i，v_j有

$$\varepsilon(G)-d(v_i)=\varepsilon(G-v_i)$$
$$=m\binom{\nu-1}{n}\Big/\binom{\nu-3}{n-2}$$

$$\varepsilon(G)-d(v_i)-d(v_j)+a_{ij}=\varepsilon(G-v_i-v_j)=m\binom{\nu-2}{n}\Big/\binom{\nu-4}{n-2}$$

二式相减：$d(v_j)-a_{ij}=m\dfrac{(\nu-1)!}{n!(\nu-1-n)!}\cdot\dfrac{(n-2)!(\nu-n-1)!}{(\nu-3)!}$

$$-m\frac{(\nu-2)!}{n!(\nu-2-n)!}\cdot\frac{(\nu-n-2)!(n-2)!}{(\nu-4)!}$$

$$=\frac{2m(\nu-2)}{n(n-1)}$$

等式右端为与i, j无关的常数，但$d(v_j)$应为一个常数，故对任意的i，a_{ij}恒等于1或a_{ij}恒等于0；又由j的任意性知对任意的i、j，a_{ij}恒等于1或a_{ij}恒等于0，即或$G\cong K_\nu$或$G\cong K_\nu^c$。

3．图的序列

(21) 试证当且仅当$\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数时，非负整数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$是某个图的次数G序列。

证明：必要性：由$\sum_{i=1}^{n} d_i=2\varepsilon$知$\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数。

充分性：对非负整数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，若$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数，我们欲证总存在一个图G使$(d_1, \cdots, d_n)$是G的次数序列。令$V(G)=\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$在每个点$v_i$时做$\left[\dfrac{d_i}{2}\right]$个环，若$d_i$为偶数，此时$d(v_i)=d_i$；否则由$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数，故为奇数的$d_i$必有偶数个。将这偶数个对应的$v_i$间连边，使任意两边不邻接，即每个结点的度数增加1，此时这些v_i亦有$d(v_i)=d_i$。

(22) 试证：①（7，6，5，4，3，3，2）和（6，6，5，4，3，3，1）不是图的序列；②若 d 为图的序列且 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，则 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数且 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant K(K-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{K, d_i\}$ $(1 \leqslant K \leqslant n)$。

证明：①（7，6，5，4，3，3，2）若是图的序列，这图必有7个顶点且为简单图，故 $\Delta \leqslant 6$ 不能出现7，引出矛盾。

（6，6，5，4，3，3，1）若为图的序列，图有7个顶点，$\Delta \leqslant 6$；序列中有两个6，即图中有两个点与其余的顶点都邻接，即 $\delta \geqslant 2$ 与序列中出现1相矛盾。

②由 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2\varepsilon$，得知 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数。设 G 以 d 为度数序列，对任意的 $1 \leqslant K \leqslant n$，将图 G 的顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 分为两部分：$s_1 = \{v_1, \cdots, v_k\}$，$s_2 = \{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$。$G$ 为简单图，故 $\sum_{i=1}^{k} d_i$ 等于 $2\varepsilon(G[s_1])$ 加上顶点分别在 s_1 和 s_2 的总边数。但 $2\varepsilon(G[s_1]) \leqslant K(K-1)$；端点分别在 s_1 和 s_2 的边数和 $\leqslant \sum_{i=k+1}^{n} \min\{K, d_i\}$，故有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant K(K-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(K, d_i) \quad (1 \leqslant K \leqslant n).$$

(23) 试证：①当且仅当 d' 是图的序列时，d 才是图的序列。这里 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是非负整数的非增序列，$d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n)$；②利用①给出一个可以构造出具有次数序列 d 的简单的算法，如果这种图存在的话。

证明：①若 G 是简单图，且 u_1v_1，$u_2v_2 \in E(G)$，而 $u_1v_2, u_2v_1 \notin E(G)$，则 $G - \{u_1v_1, u_2v_2\} + \{u_1v_2, u_2v_1\}$ 有和 G 相同的度数序列。

若 d 是图的序列，则存在一个简单图 G'，使 d 是 G' 的度数序列，总可以适当地排列其结点的次序，使 $d(v_i) = d_i$，这里 $V(G') = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。若 v_1 和 v_2，$v_3 \cdots$，v_{d_1+1} 中的某点 v_m 不邻接，则必与 v_j（$j > d_1 + 1$）邻接，由于 d 是非增序列，则必存在一个 v_p 与 v_m 邻接，但不与 v_j 邻接，于是由前可知 $G' - \{v_1v_j, v_mv_p\} + \{v_1v_m, v_pv_j\}$ 与 G' 有相同的度数序列。如此继续对 v_2，v_3，$\cdots$，v_{d_1+1} 中与 v_1 不邻接的点使用上述做法，总可得到一图 G 与 G' 有相同的度数序列，即 $V(G) = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 使 $d(v_i) = d_i$，且 v_1 和 v_2，v_3，$\cdots$，v_{d_1+1} 连接，显然 $G - v_1$ 便有度数序列 d'，故 d' 也是图的序列。

反之，若 d' 是图的序列，便有简单图 H 使 $V(H) = \{v_2, \cdots, v_n\}$，$d(v_i) = d_i - 1$（$i = 2, \cdots, d_1 + 1$）；$d(v_i) = d_i$（$i = d_1 + 2, \cdots, n$）。在 H 中增加点 v_1 且把 v_1 与 v_2，$\cdots$，v_{d_1+1} 连接，得到的图仍是简单图且以 d 为度数序列，故 d 是图的序列。

②开始 $i = 0$，$d_0 = d$。

Step1. 求出 d_i' 并按不增次序重新排列 d_i' 的分量得 d_{i+1}。

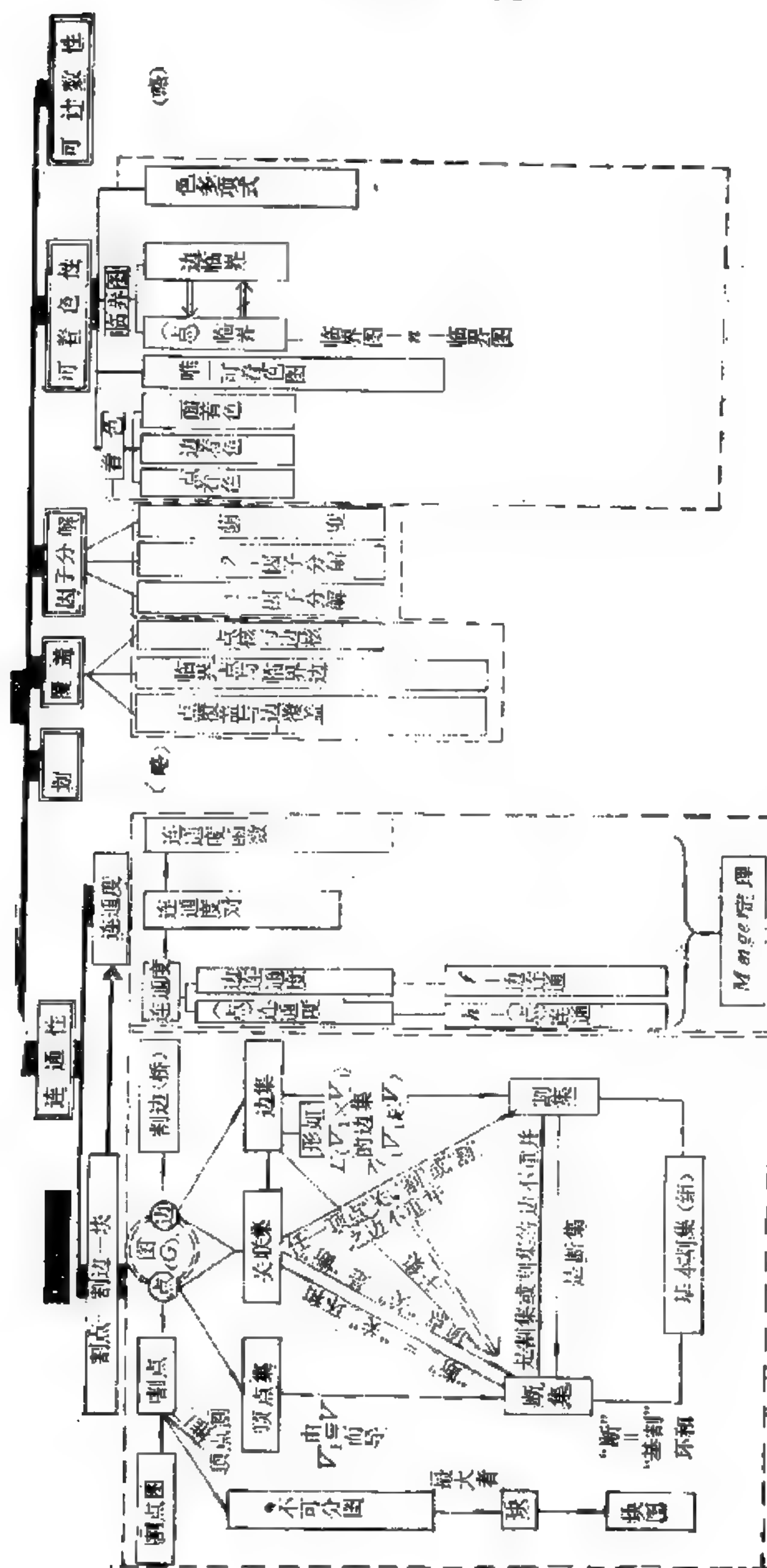
若 $d_{i+1} = (0, 0, \cdots, 0)$ 结束，否则转Step2。

Step2. $i + 1 \to i$，重复Step1。

这样便得到一系列图的度数序列d_0，d_0'，d_1，d_1'，…，d_{K-1}，d_{K-1}'，d_K，$d_K=(0，…，0)$。设d_K有m个分量，开始令$j=K$，做m个结点的空图，排列结点的次序得G_j，以d_{j-1}为度数序列，加一个顶点于G_j且将这顶点与G_j的前$d_{j-1,1}$个顶点连接（此处$d_{j-1,1}$是d_j的第一个分量）得到图G_{j-1}。若$j-1=0$结束，否则令$j-1\to j$重复前述步骤

二、图的一般性质

（一）结　　构



（二）概　　念

1. 连通性

（1）割点：图 G 中去掉一顶点及与其相关联的所有边，图的分支增加，则称此顶点为割点。

割边：图 G 中去掉一边后，图的分支增加，则称此边为割边或称为桥（图2.1）。

块：是一个最大的不可分子图（图2.2）。

（2）关联集：与顶点 v 关联的所有边的集合，称为顶点 v 的关联集，记作 $S(v)$。

割集：设 S 是图 G 的一个边集，若（1°）$R(G-S)=n_o-2$；（2°）对 S 的任一真子集 S'，有 $R(G-S')=n_o-1$，则称边集 S 为图 G 的一个割集，（即在 G 中去掉 S 的所有边后，G 变成具有二分支的分离图，但去掉 S 中的部分边，图将仍然是连通的。此处 R 示图的秩：图 G 连通时，$R(G)=n_o-1$；图 G 是有 P 个分支的分离图时，$R(G)=n_o-P$）。（图2.3）



a、b、c均为割边

图　2.1

G:



G的块：

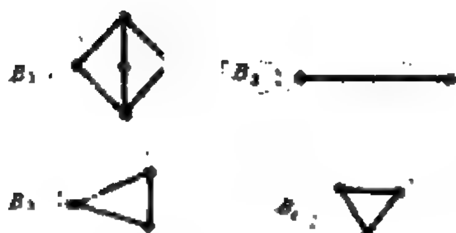
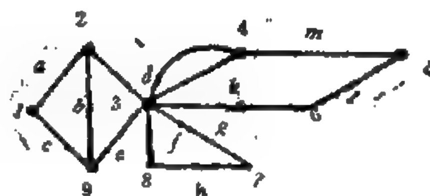


图　2.2



关联集：$s(1)=\{a,\ c\}$，$s(2)=\{a,\ b,\ d\}$

$s(4)=\{i,\ j,\ m\}$，$s(5)=\{m,\ l\}$，

$s(6)=\{k,\ l\}$，$s(7)=\{g,\ h\}$，

$s(8)=\{f,\ h\}$，$s(9)=\{b,\ c,\ e\}$，

皆为割集

图　2.3

断集：设 V_1 是图 $G=(V,E)$ 的顶点集 V 的一个子集，G 中端点分别属于 V_1 和 $\bar{V}_1$ 的所有边的集合，称为 G 的断集。

基本割集：设 S 为图 G 的一个割集，T 是 G 的一棵生成树（见后（10）），若 S 中恰好含有 T 的一个树枝，则称 S 为 G 的关于生成树 T 的基本割集。

基本割集组：连通图 G 的 n_o-1 个基本割集称为 G 的关于生成树 T 的一个基本割集组，记作 S_f；若 G 是含 P 个分支的分离图，则 G 关于生成森林（见后（10））的基本割集组中含有 n_o-P 个基本割集。

（3）不可分图：是连通的、非平凡的且无割点的图。

块图：若取 G 的块作为集的族 F，则交图 $\Omega(F)$ 称为 G 的块图，记作 $B(G)$（图2.4）。

割点图：为了得到一个图，使它的点对应于 G 的割点，我们可以取 S_i 为所有含有割点

v_i的块的序。得到的交图$\Omega(F)$称为割点图，记作$C(G)$（图2.4）。

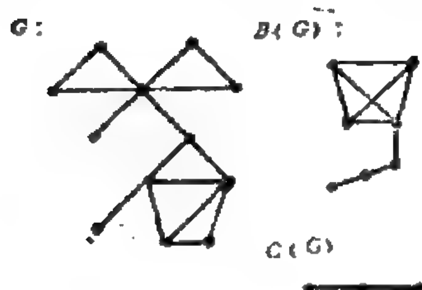


图 2.4



G的生成树$T=\{a, b, d, g\}$，G关于T的基本回路组是$c_1=\{a, b, c, \}$，$c_2=\{a, b, d, e\}$，$c_3=\{a, b, d, g, h\}$，$c_4=\{d, f, g\}$。

图 2.5

（4）基本回路：设T是连通图G的一棵生成树，由T的树枝和一条连枝（见后(10)）构成的回路，称为图G的关于生成树T的基本回路。（分离图G的关于生成森林T的基本回路可类似地定义）。

基本回路组：连通图G的由n_e-n_v+1条连枝形成的n_e-n_v+1条基本回路，称G关于生成树T的基本回路组。（分离图G关于生成森林T的基本回路组是由n_e-n_v+p条基本回路组成的）（图2.5）。

（5）顶点割：若V的一个子集T，使$G-T$不连通或是平凡图，则称T是G的顶点割。

（点）连通度：设G是连通图，称数$K(G)=\min\{|T|\,|\,T$是G的顶点割$\}$为G的（点）连通度（或称点断量，简称断量）；

边连通度：设G是连通图，称数$\lambda(G)=\min\{|S|\,|\,S$是$G$的断集$\}$为$G$的边连通度（或称边断量）。

$\delta(G)$：是G的顶点的最小度数。（同-(=)-(8)）

h-(点)连通：设图$G=(V,E)$，若$K(G)\geqslant h$，则称G是h-(点)连通的；（图2.6）

f-边连通：若$\lambda(G)\geqslant f$，则称G是f-边连通的。



$K(G)=2$，$\lambda(G)=3$，$\delta(G)=4$。

图 2.6

（6）连通度对：是非负整数的一个有序对(a,b)，使得存在某一个有a个点和b条边的集，移去它们后图就不连通了；但不存在有$a-1$个点和b条边的集或有a个点$b-1$条边的集具有此性质。

（7）连通度函数：一个图G的连通度对决定一个从集$\{0, 1, \cdots, K\}$到非负整数中的函数f，且使$f(K)=0$。这个函数称为G的连通度函数（它是严格递减的）。

（8）点不相交：令u和v是一个连通图G的两个不同的点。两条联结u和v的通路若

除了 u 和 v 外没有公共点（从而没有公共边）就称为是不相交的（有时称为点不相交的）。

边不相交：若它们没有公共边，就称为是边不相交的。

（9）分离：一个点集或者一个边集或者点和边的一个集 S，若 u 和 v 在 $G-S$ 的不同的支中，就称它分离 u 和 v。

（10）树：[3] 不含有回路的连通图。

生成树（跨顶树或支撑树）：图 G 的一个生成子图且是一棵树，记作 T。

余树：图 G 的一个部分图，取原图的顶点集为其顶点集，取生成树 T 以外的边为边集，记作 T_*。

树枝：树中的边。

连枝：设 T 是连通图 G 的一棵生成树，属于 G 而不属于 T 的边。

森林：连通分支都是树的分离图。

（11）极小 K-联：一个 K-联图 G，假使去掉它的一边 $[x,y]$（简写作 xy）G 便失去了 K-联的性质，则边 xy 称为是 K-联图 G 的关键边。假使 K-联图的每一边都是关键性的，則 G 便称为是极小 K-联的。

（12）集块图：设图 G 无孤立顶点，令其集块（是 G 的一个最大子图，联接且不含断点）的集合是 $\{B_1, B_2, \cdots, B\}$，取这些集块做顶点，每二集块 B_i 与 B_j 有断点相联的，联边，便得一个新图，称为原图 G 的集块图，记为 $B(G)$。

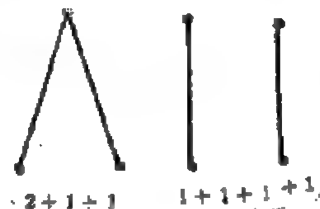
（13）集块断点图：设将原图 G 的集块和断点作为新图的顶点，凡断点交于集块的便在新图里将此二点联边，这个图叫做原图的集块断点图，记作 $bc(G)$。

（14）许可的：已知图 G 的二顶点，及联此二顶点的任一链，在此链上，任二顶点之间，如有联边，则此联边总在该链上，则此二顶点称为是许可的。

2. 划分

（15）划分：非负整数 n 的一个划分是非负整数的一个有限表，这些非负整数的和是 n；属于一个图的划分是 $2q$ 作为各点的度的和的一种划分。

（16）图划分：若一个图 G 它各点的度为 d_i，则分 n 为 p 个部分的划分 Σd_i 称为是图划分（图2.7）。



4 的图划分

图 2.7

3. 覆盖

（17）覆盖：若一个点和一条边互相关联，则称它们互相覆盖。

点覆盖集：覆盖一个图 G 的所有边的一个顶点集称为 G 的一个点覆盖集。

边覆盖集：称覆盖所有顶点的一个边集为一个边覆盖集。

点覆盖数：G 的各个点覆盖中点的最少数目称为 G 的点覆盖数，记作 $\alpha_0(G)$ 或 α_0。

边覆盖数：G 的各个边覆盖中边的最少数目称为 G 的边覆盖数，记作 $\alpha_1(G)$ 或 α_1。

极小的：若一个点覆盖（边覆盖）含有 $\alpha_0(\alpha_1)$ 个元素，就称它是极小的。

（18）稳固集（点独立集）：G 的一个点集中若没有两个点是邻接的，这个点集就称为点独立集，或称为 G 的稳固集。

稳固数（点独立数）：设 S_1 是一个稳固集其绑 $|S_1|$ 极大，即其中所含点的个数，至少不

少于任何这样的一个稳固集。设S是任一稳固集，恒有$|S_1|\geqslant|S|$。则S_1称为极大稳固集，其维称为原图的稳固数（点独立数）。一般记作$\beta_0(G)$或β_0。

（19）并列集（边独立集）：已给图$G=(X,E)$，在其边集E中，任取子集$M\subset E$，使在子集M里，没有二边相邻，这样的边集M，称为图G的并列集（边独立集）。同理，定义边独立数，并记作$\beta_1(G)$或β_1。

饱和点：图G的顶点和并列集M中某一边相遇，则这个点称为并于并列集M的饱和点。否则，称为关于M的非饱和点。

（20）交错链：在图G上，M是它的一个并列集，它的边画以粗线，其它不在并列集M里的边，画以细线；若有链，它的边是粗细交错的，则称此链为关于并列集M的交错链。

镶边交错链：两个端点都是非饱和点的交错链，称为镶边交错链。

交错圈：在图G中，边是粗细交错的圈，称为关于并列集M的交错圈。

（21）交换：在图G中，已给并列集M，就M而言，有交错链与交错圈，在交错链或交错圈上，可以把粗线与细线相互交换，其他的边都不变，这样的运算，称为一个交换。

（22）极大并列集：由于图$G=(X,E)$是有限的，边数最多的并列集总存在。这种边数最多的并列集，称为极大并列集。

（23）径集：在以点为主对边的覆盖中，任一边至少有一个端点在这样的覆盖集（顶点集之子集）中，这种覆盖集称为径集。

（24）项秩：在一个（0,1）矩阵里，含尽所有的“1”的极少线数（所谓线指行和列）等于矩阵里不同行不同列的“1”的极大个数。这个数，一般叫做（0,1）矩阵的项秩。

（25）传递的：若G的每一个子图具有某种性质P，则称图G的性质P为传递的。

（26）匹配：一个图G的独立边的一个集有时称为G的一个匹配；极大匹配：G中有β_1条独立边的一个集。

（27）交替M-迹：令$M\subset X(G)$是G的一个匹配。一条交替M-迹是任何两条连接的边中恰有一条在M中。

可扩张M-迹：是一条交替M-迹，且它的两个端点都不关联于M的任何一条边。

不可扩张的：若G没有可扩张M-迹，则匹配M称为是不可扩张的（显然，每一个极大匹配是不可扩张的）。

Y-缩减通道：令Y是G的一个边覆盖。若一条交替Y-通道的端边都在Y中，且它的两个端点除了关联于这条通道的端边外还关联于Y的其它边，则称这条通道为一条Y-缩减通道（显然，每一个极小边覆盖没有缩减通道）。

（28）临界点：若$\alpha_0(G-v)<\alpha_0(G)$，则称$v$是一个临界点。

临界边：若$\alpha_0(G-e)<\alpha_0(G)$，则称$e$是一条临界边。

（显然，若v和e是临界的，可得$\alpha_0(G-v)=\alpha_0(G-e)=\alpha_0-1$）。

点临界的：一个图若其中每个点都是临界的，则称此图是点临界的。

边临界的：一个图若其中每条边都是临界的，则称此图是边临界的。（图2.8）

（29）边核：一个图G的边核$C_1(G)$是G的一个子图，它由所有（若存在的话）使$|Y|=\alpha_0(G)$的边的独立集Y的并导出（图2.9）。

（30）外部的：一个以V为点集的图G的一个极小点覆盖M称为外部的，若对M的每一个子集M'，$|M'|\leqslant|U(M')|$，其中$U(M')$是$V-M$中所有与M'的一个点邻接的点的集。



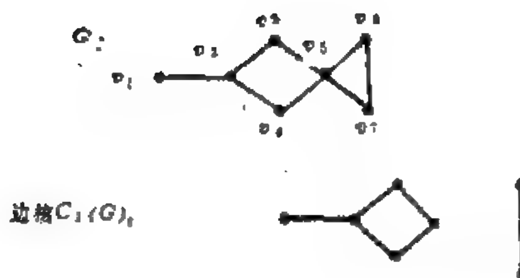


图 2.8　　　　图 2.9

(31) 半不可约的：考虑一个双图G，它的点集V是不相交的并$S\cup T$。若G恰有一个极小点覆盖M，且或者$M\cap S$是空的或者$M\cap T$是空的，我们称G是半不可约的。

不可约的：若它恰有二个极小点覆盖M_1和M_2，且或者$M_1\cap S=\phi$及$M_2\cap T=\phi$或者$M_1\cap T=\phi$及$M_2\cap S=\phi$，称它是不可约的。（图2.10）。

可约的：若它既不是不可约的又不是半不可约的，G就称为是可约的。

4．因子分解

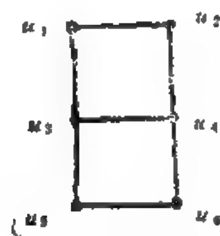
(32) 因子：图G的一个非全不连通的生成子图。

(33) 和：若G是因子G_i的边不相交的并，则称G是因子G_i的和。

(34) 因子分解：上述并称为G的一个因子分解。

(35) n-因子：一个n-因子是一个n度正则的因子。

n-因子分解：若G是几个n-因子的和，它们的并称为一个n-因子分解。而G本身称为是n-可因子化的（图2.11）



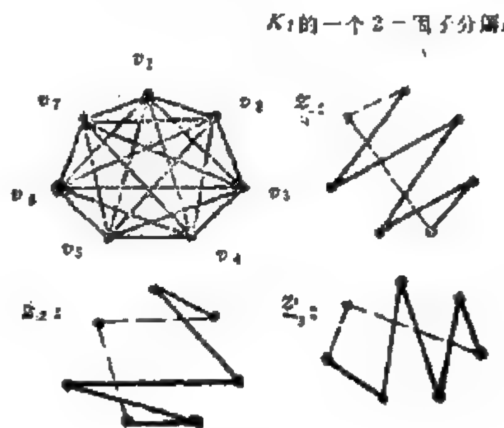


图 2.10　　　　图 2.11

(36) 独立的：一个互相不邻接的边的集称为是独立的。

奇支：G的一个有奇数个点的支叫做一个奇支。

(37) 荫度：将G分解为边不相交的生成林时生成林的最少数目，称为G的荫度，记作$r(G)$。

(38) 已给简单图$G=(X,E)$。若存在这样的并列集，它饱和G的所有顶点，则称之为踪

图的完美并列集。在图论中，称之为图的1-因子。

（39）极大图：一个图G，给定它的阶为n。设G满足某些已给的条件，这些图构成一个图类。在这类图里，边数$E(G)$最大的，称为极大图。

5. 可着色性

（40）着色：图的一个着色是对它的每一个点指定一种颜色，使得没有两个邻接的点有同一颜色。

色组：具有任何一种相同的颜色的所有的点的集是独立的，且称为一个色组。

n-着色：图G的一个n-着色是用n种颜色的一个着色（按此种着色可将V划分为n个色组）。

色数$\chi(G)$：是使G有一个n-着色的最小的数目n。

n-可着色的：若$\chi(G)\leqslant n$，则称G为n-可着色的。

n色的：若$\chi(G)=n$，则称G为n色的。

数$\bar{\chi}=\bar{\chi}(G)=\chi(\bar{G})$：是划分$G$的点集得到的子集的最少数目，而使每一个子集导出$G$的一个完全子图。（显然，$\bar{\chi}(G)\geqslant\beta_0(G)$）。

（41）平面地图G的一个着色：是对G的每一个区域指定一种颜色，使得没有两个邻接的区域被指定为同一颜色。

n-可着色：若地图G有一种用n种或更少的颜色的着色，就称G是n-可着色的。

（42）边着色：图G的一个边着色是对它的每一条边指定一种颜色，使得没有两条邻接的边被指定为相同的颜色。

n-边着色：G的一个n-边着色是用正好n种颜色的G的一个边着色。

（43）边色数$\chi'(G)$：是使得G有一个n-边着色的最小的数目n（对于任一非全 不连 通的图G，$\chi'(G)=\chi(L(G))$）。

（44）S_n的色数：令S_n是亏格（见后四-(二)-(Ⅵ)）等于n的可定向曲面（S_n拓扑等价于一个有n个环柄的球面），S_n的色数是可以嵌入S_n的所有图的色数中最大的 一 个，记作$\chi(S_n)$。

（45）唯一可着色：令G是一个标定图。G的任何一个$\chi(G)$－着色导出一个分G的点集为$\chi(G)$个色组的划分。若$\chi(G)=n$且G的每一个n-着色导出的V的划分都相同，则称G是唯一n-可着色的或简称唯一可着色的。（图2.12）

（46）临界图：一个图G称为是临界的，若对所有的点v，$\chi(G-v)<\chi(G)$；若$\chi(G)=n$，则G是n-临界的（图2.13）。



一个唯一可着色图

图 2.12

4-临界图：格罗茨施图

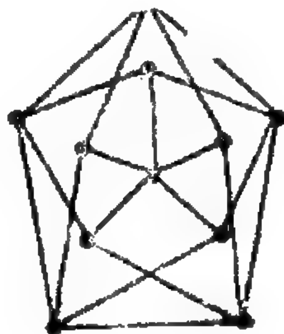


图 2.13

边临界的：若对任何一条边e，$X'(G-e)=X'(G)-1$，则称图G为边临界的；若$X'(G)=n$，则G是n-边临界的。

（47）G的一个至多t色的着色：是G的一个用t种或不到t种颜色的着色。用$f(G,t)$记一个标定图G的不同的至多t色的着色的数目，称$f(G,t)$为G的色多项式。（图2.14）

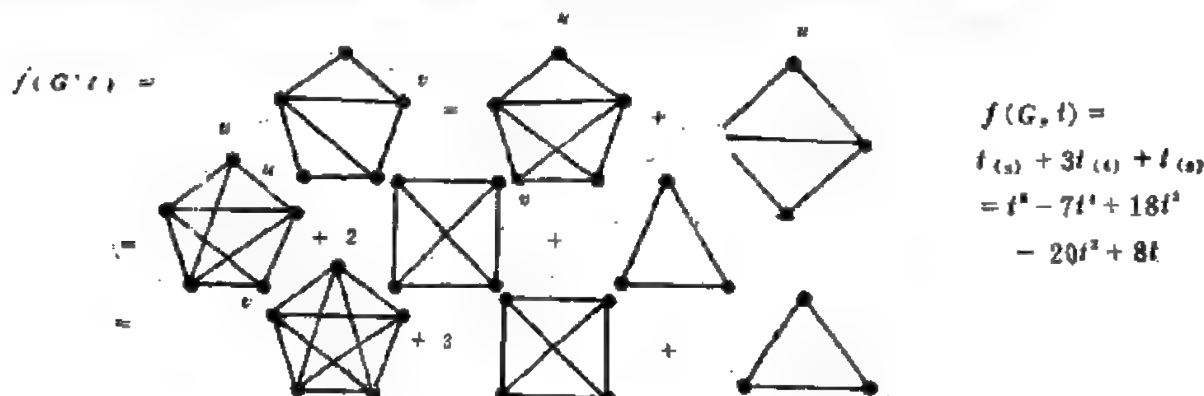


图 2.14

（48）完全着色：对于任何两种颜色，有G的两个邻接的点u和v以这两种颜色着色。这种情形称为是一个完全着色。（图2.15）。

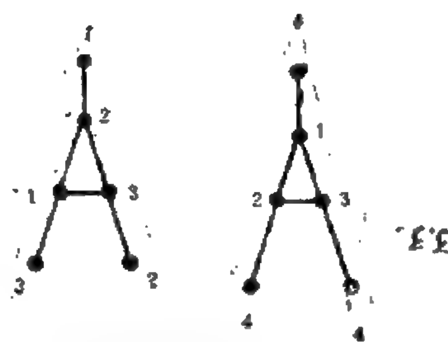


图 2.15

（49）消色数$\psi(G)$：G的所有完全同态中最大的阶，这个不变量称为消色数。

6．可计数性

（50）位置：指定义域的元素。

图形：指值域的元素。

构形：指函数。

构形群：指置换群。

（51）f的权：对每一个$f\in R^D$指定一个权$W(f)$，它用下列方程定义：

$$W(f)=\prod_{d\in D}x^{w_1(f(d))}y^{w_2(f(d))}.$$

（52）图形计数级数——是按权来计数R的元素的：

$C(x,y)=\Sigma C_{mn}x^m y^n$（$R$中权等于$(m,n)$的图形有$C_{mn}$个）。

构形计数级数——是函数的等价类的生成函数：

$C(x,y)=\Sigma C_{mn}x^m y^n$。（$R^D$中权等于$x^m y^n$的轨（构形的等价类）有$C_{mn}$个）。

（53）n-子集：一个集X的一个n-子集是恰有n个元素的一个子集。

（三）定　理

1．连通性

（1）是连通图G的一个割点$\Longleftrightarrow$存在与v不同的两个顶点u和w，使v在每一条u-w道路上$\Longleftrightarrow$存在一个将点集$V-\{v\}$分成子集U和W的划分，使对任何两点$u\in U$和$w\in W$，点v在每一条u-w道路上。

（2）每一个非平凡的连通图$\Longrightarrow$至少有两个顶点不是割点。

(3) e是连通图G的一条割边（桥）$\Longleftrightarrow e$不在G的任何一个圈中$\Longleftrightarrow$存在G的点u和v，使e在每一条联结u和v的道路上$\Longleftrightarrow$存在将V分成子集U和W的划分，使对任何两点$u\in U$和$w\in W$，边e在每一条联结u和w的道路上。

（4）图G中任一顶点的关联集等于其余顶点关联集之环和。

（5）G是n_v阶连通图$\Longrightarrow G$恰有n_v-1个线性无关的关联集；

G是有p个分支的分离图$\Longrightarrow G$恰有n_v-p个线性无关的关联集。

（6）S_1和S_2是图G的二断集$\Longrightarrow S_1\oplus S_2$也是图$G$的断集。

（7）连通图G的一个割集，至少包含G的生成树的一个树枝。

（8）设T是图G的一棵生成树，T的连枝e'包含在由树枝e确定的基本割集中$\Longleftrightarrow$树枝e包含在由连枝e'确定的"基本回路"中。

（9）对于给定的图G，有

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$$

(10) (Harary定理)对任何图G，有

$$\kappa(G)\leqslant\left[\frac{2n_e}{n_v}\right],$$

$$\lambda(G)\leqslant\left[\frac{2n_e}{n_v}\right].$$

(11) 对全部满足$0<a\leqslant b\leqslant c$之正整数$a$、$b$、$c$，存在一个图$G$，使

$\kappa(G)=a$、$\lambda(G)=b$，$\delta(G)=C$。

(12) G有p个点，且$\delta(G)\geqslant[p/2]\Longrightarrow\lambda(G)=\delta(G)$。

(13) 所有（p，q）图中$\Longrightarrow q<p-1$时，最大连通度等于0；$q\geqslant p-1$时，最大连通度等于$[2q/p]$。

(14) (p,q) 图之最大边连通度等于其最大连通度；

(Harary) 给定正整数n、m，满足条件$0\leqslant n-1\leqslant m\leqslant\binom{n}{2}\Longrightarrow \max K(G)=\max\lambda(G)=[2m/n]$，其中极大是对所有具$n$个顶点$m$条边的简单图$G=(X,E)$而言。

(15) 已给n阶图$G=(X,E)$，$n\geqslant K+1\geqslant 2$。图$G$不是$K$-联的$\Longrightarrow$图$G$的顶集$X$有二互质的子集$X_1$与$X_2$，其中$|X_1|=n_1\geqslant 1$，$|X_2|=n_2\geqslant 1$满足条件

$$n_1+n_2+(K-1)=n,$$

且X_i中任一点，其最大次数不超过

$$n_i+K-2, \qquad (i=1,\ 2)$$

(16) 设图G的顶点编号为x_1，x_2，…，x_n使

$$d_G(x_1)\leqslant d_G(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d_G(x_n)=\Delta,$$

且 $d_G(x_j)\geqslant j$（对一切$j\leqslant n-\Delta-1$均成立）$\Longrightarrow G$是联接的（即任二顶点间均有链相联）。

(17) 设图$G=(X,E)$的顶点编号为x_1，x_2，…，x_n使 $d_G(x_1)\leqslant d_G(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d_G(x_n)=\Delta$，并设存在整数$K$，$0\leqslant K<n$，使

$$d(x_j)\geqslant j+k-1 \text{对一切} j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1-d_G(x_{n-k+1})$$

均成立$\Longrightarrow$图G是K-联的。

(18) 设图G是n阶的，且不是完全图$\Longrightarrow$

$$\kappa(G) \geqslant 2\delta(G)+2-n.$$

(19) 已给非负整数 n、δ、κ 与λ，存在 n 阶简单图G，使$\delta(G)=\delta$，$\kappa(G)=\kappa$，$\lambda(G)=\lambda \Longleftrightarrow$ 下列三条件有其一成立：

i) $0\leqslant\kappa\leqslant\lambda\leqslant\delta<[n/2]$；

ii) $1<2\delta+2-n\leqslant\kappa\leqslant\lambda=\delta<n-1$；

iii) $\kappa=\lambda=\delta=n-1$。

(20) G是h-连通的$\Longrightarrow$每个顶点的度均大于或等于h。

(21) G是h-连通的，$v(e)$ 是G中一顶点（边）$\Longrightarrow G-v(G-e)$是（$h-1$）-连通的。

(22)（Whitney定理） 设G是$n_v>3$的图，G是2-连通的$\Longleftrightarrow G$的任二顶点至少由两条内部不相交的通路所连通。

(23) G是2-连通的$\Longrightarrow G$的任二点都位于同一条回路上。

(24) G是$n_v\geqslant3$的不可分图$\Longrightarrow G$的任二边都在同一条回路上。

(25) G是n-连通的，且$n\geqslant2\Longrightarrow G$的任何一个有$n$个点的集在一个圈上。

(26) 一个图G的两个不同的n-支至多有$n-1$个公共点。

(27) （Tutte[1961]）一个简单图G（见图2.16）是3-连通的$\Longleftrightarrow G$是一个轮形图（对于$n\geqslant4$，轮形图W_n定义为图K_1+C_{n-1}），或可由一轮形图经一系列下列二运算得到：

(1°) 加上一新的边；

(2°) 将一个度至少等于4的点v代以两个邻接的点v'、v''，使以前联结于v的点恰与v'或v''之一联结，且使得到的图中$\deg v'\geqslant3$和$\deg v''\geqslant3$。

轮形图$W_6=K_1+C_5$。

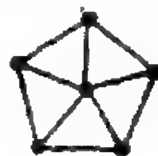


图 2.16

(28) $(\kappa,0)$ 和 $(0,\lambda)$ 是G的连通度对。

(29) 对每一个值a，$0\leqslant a\leqslant K$，有唯一的连通度对 (a,b_a)。

(30) G有$K+1$个连通度对（通过移去点和边的一个混合集来使图分离）。

(31) 每个由$\{0,1,\cdots\cdots,K\}$到非负整数中的递减函数$f\Longrightarrow f(K)=0$是某个图的连通度函数。

(32) 令G是至少有三个点的一个连通图，G是一个块$\Longleftrightarrow G$的任何两点在一个公共的圈上$\Longleftrightarrow G$的任何二边在一个公共圈上$\Longleftrightarrow G$的任何一点和任何一边在一个公共圈上$\Longleftrightarrow$给定G的二点一边，存在一道路联结这二点且含这条边$\Longleftrightarrow$对G的每三个不同点，存在一道路联结其中二点且含第三点$\Longleftrightarrow$对G的每三个不同点，存在一道路联结其中二点而不含第三点。

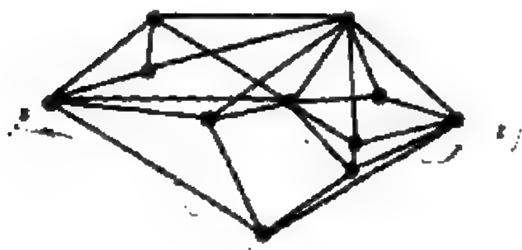
(33) 一个图H是某图的块图$\Longleftrightarrow H$的每一个块是完全的。

(34) （Ramachandra Rao[1968]）阶$n\geqslant2$的简单联接图G，具r个断点，这种图所可能含有的极大边数是

$$\binom{n-r}{2}+r.$$

(menger定理及其在联接性上的应用)

(35) (无向图下的蒙格尔定理) 分离两个不邻接的点S和t的点的最少数目等于不相交的S-t道路之最多数目 (见图2.17)。



说明Menger定理的一个图

图 2.17

(36) (有向图下的蒙格尔定理[1927]) 在有向图$G=(X,U)$上，任二点S与t之间弧互质的通路的极大个数，等于截断S与t的极少弧数。

(37) 一个图是n-连通的⟺每一对点由n条点不相交的道路所联结。

(38) 对于一个图的任何两点，联结它们的边不相交的道路的最多数目等于分离它们的边的最少数目。

(39) 一个图是n-边连通的⟺每一对点由至少n条边不相交的道路所联结。

(40) 对于任何两个不相交的非空点集V_1和V_2，联结V_1和V_2的不相交道路的最多数目等于分离V_1和V_2的点的最少数目。

(41) 一个有至少$2n$个点的图是n-连通的⟺对于任何两个各含有n个点的不相交的点集V_1和V_2，存在n条联结这两个点集的不相交道路。

(42) 有序对 (a,b) 是一个图G中点u和v的连通度对⟺存在a条点不相交的$u-v$道路和b条互相边不相交且也与前面a条道路边不相交的$u-v$道路，且这两个数是这种道路可能有的最多数目。

(43) 在任何一个图中，分离两个点u和v的边不相交的边割集的最多数目等于在一条联结u和v的道路下边的最少数目，即$d(u,v)$。

(44) 设图G是h-联的 ($h\geqslant 2$) ⟹G的任二相异顶点s与t，恒同在$\binom{h}{2}$个不同的初级圈 (除两端重合外，中间顶点皆异的圈) 上。

(45) 设图G是h-联的，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_h\}$，其中h个点互异．又$a\in X-B$⟹自a到B可联h条点互质的 (点a除外) 初级链 (无重复顶点的链)。

(46) 设图$G=(X,E)$是h-联的 ($h\geqslant 2$)。在G中任取二相异边e_1与e_2，并另取h-2个相异顶点a_1，a_2，$\cdots$，a_{h-2}⟹恒存在初级圈通过这些边与顶。

(47) 设简单图G是h-联的 ($h\geqslant 2$)，在G上任取h个点⟹恒有初级圈，过所给的h点。

[menger定理的其它形式]

(48) 在任何一个网络N中，若有一条从u到v的道路，则从u到v的最大流等于最小截量。

(49) 在任何一个二元矩阵中，独立的单位元的最多数目等于覆盖所有单位元的边的最少数目。

(50) 对于一族不同的集s_1，s_2，$\cdots$，s_m，存在一组不同的代表元素⟺这些集中任何K个的并至少包含K个元素，K从1到m都成立。

(51) 在任何一个有限格中，不可比元素的最多数目等于用来包含所有元素的链的最少数目。

(52) 已给简单图G，xy是其一边，令$H=G-xy\Longrightarrow$以下二论断等价：

i）图G是2-联的，边xy是关键性的；

ii）图H无孤立顶点，x与y都不是图H的断点，H的集块断点图$bc(H)$有一条$[x,y]$链，x属于H的头一个集块，y属于H的末一个集块（如图2.18）。



图 2.18

(53) 设图G是2-联的，$a=xy$是图G的一条边，边a是关键性的$\Longleftrightarrow G-a$里无圈同时包含x与y，亦即a不是图G里某个初级圈的弦。故一个2-联图是极小2-联，当且仅当这个图上的圈不含弦。

(54) 设图G是2-联的，其阶$n\geqslant 4\Longrightarrow G$不含由关键性的边所构成的三角形。

(55) 极小2-联图G的任一2-联子图是极小2-联的。

(56) 已给正整数$k\geqslant 1$，对每一个整数i（$0\leqslant i\leqslant k$），令G_i是一条边$x_ix'_{i+1}$，或是一个极小2-联图，包含许可点对x_i与x'_{i+1}。令G是一个图，得自$\bigcup\limits_{i=1}^{k}G_i$，其中使$x_i$与$x'_i$重合（$1\leqslant i\leqslant k$）然后再联边$x_0x'_{k+1}\Longrightarrow G$是一个极小2-联图。反之，任何一个极小2-联图，都可以描述如上。

(57) 设G是一个极小2-联图，x，y是G的一对许可点$\Longrightarrow$每一条$[x-y]$链，都含G的2次顶点。

(58) 设G是一个极小2-联图，但不是一个圈$\Longrightarrow$在G内，每一个圈上将至少包含二顶点，其次数$\geqslant 3$，且此二顶点在圈上被2次顶点隔开。

(59) 设G是一个极小2-联图，但不是圈。令D是G的2次顶点集$\Longrightarrow F=G-D$是一个林，至少具有二个分子图。子图$G[D]$的每一个分子图P是一条链，其两个端点，不联接林F的同一棵树。

(60) n阶的极小2-联图，至少含$(n+4)/3$个2次顶点。对于$n\equiv -1, 0 \pmod 3$，这个结果是可能最好的。

(61) 阶$n\geqslant 4$的极小2-联图，其边数$m\leqslant 2n-4$，且两分图$K_{2,\,n-2}$是仅有的阶为n边数为$2n-4$的极小2-联图。

(62) 设G是一个极小k-联图，xy是G的一边，S是一个$(k-1)$-集，在$H=G-xy$里分隔$H\Longrightarrow H-S$恰含两个分子图，其中一个包含x，一个包含y。

(63) 一个k-联图G是极小k-联的$\Longleftrightarrow$对每一对邻点x、y有$\kappa(x,y)=k$。

(64) 设G是一个极小k-联图$\Longrightarrow\delta(G)=k$。

2. 划分

(65) 分一个偶数为p个部分的划分$\Pi=(d_1,d_2,\cdots,d_p)$，$p-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$，是一个图划分$\Longleftrightarrow$经修正后的划分$\Pi'=(d_2-1,\ d_3-1,\ \cdots,\ d_{d_1+1},\ d_{d_1+2},\ \cdots,\ d_p)$也是图划分。

(66)（算法）一个给定的划分$\Pi=(d_1,d_2,\cdots,d_p)$，有$p-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$。它是一个图划分$\Longleftrightarrow$通过下列步骤产生一个每个加项为零的划分：

$\Pi=(5,5,3,3,2,2,2)$

$\Pi'=(4,2,2,1,1,2)$

$\Pi_1=(4,2,2,2,1,1)$

$\Pi''=(1,1,1,0,1)$

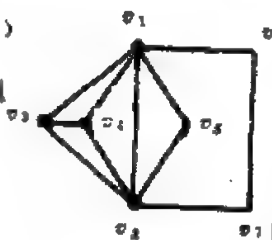


图 2.19

①求出如上述定理（65）的陈述中所说的经过修正后的划分Π'；

②重新排列Π'的项，使它们成为非增的，并且称得到的划分为Π_1；

③和第一步相同，求出Π_1的经过修正后的划分Π''和重新排列后的划分Π_2；

④只要得到的是非负加项，就继续这个过程（如图2.19所示）。

(67) 令$\Pi=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_p)$是分$2q$为$p$个部分的一个划分，$d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p$，$\Pi$是图划分$\Longleftrightarrow$对每个整数$r$，$1\leqslant r\leqslant p-1$，

$$\sum_{i=1}^{r}d_i\leqslant r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{p}\min\{r,d_i\}。$$

(68) 一个划分$2q=\Sigma_1^p d_i$属于一个树$\Longleftrightarrow$每个$d_i>0$且$q=p-1$。

3. 覆盖

(69) 对于任何一个非平凡的连通图$G\Longrightarrow\alpha_0+\beta_0=p=\alpha_1+\beta_1$。

(70) P是G的一种传递性质$\Longrightarrow\alpha_0(P)+\beta_0(P)=p$。

(71) G是二部的$\Longrightarrow$在一个极大匹配中边的数目等于点覆盖数，即$\beta_1=\alpha_0$。（寻求一极大匹配问题，与寻求一极小点覆盖的问题密切相关）。

(72) 每一个不可扩张匹配是极大的。

(73) Y是G的一个边覆盖，对它不存在Y-缩减通道$\Longrightarrow Y$是一个极小边覆盖。

(74) 任何一个图$G\Longrightarrow\alpha_{00}\leqslant\alpha'_{00}$，$\alpha_{11}=\alpha'_{11}$。（$\alpha_{00}$——覆盖$V$所需点的最少数目；$\alpha'_{00}$-覆盖$V$的独立点的最少数目；$\alpha_{11}$、$\alpha'_{11}$对边被边覆盖有类似的意义）。

(75)（关于稳固集S的交错序列）

$$\sigma=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots\}。$$

i）令$A=X-S=\{a_1,a_2,\cdots\}$，

$$B=S=\{b_1,b_2,\cdots\}。$$

在A中任取元素a_1，在B中选取元素b_1，使

$$\Gamma_G(b_1)\cap\{a_1\}\neq\phi。$$

ii）设已作得交错序列

$$\sigma=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_{i-1},b_{i-1},a_i\}，$$

则b_i按下法选取，即取b_i满足以下二条件：

$$b_i \in B - \{b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}\},$$
$$\Gamma_G(b_i) \cap \{a_1, a_2, \cdots, a_i\} \neq \phi.$$

iii）设已作得交错序列σ，如

$$\sigma = \{a_1, b_1, \cdots, a_i, b_i\},$$

则a_{i+1}的选取如次，选取

$$a_{i+1} \in A - \{a_1, a_2, \cdots, a_i\},$$
$$\Gamma_G(a_{i+1}) \cap \{b_1, b_2, \cdots, b_i\} \neq \phi,$$
$$\Gamma_G(a_{i+1}) \cap \{a_1, a_2, \cdots, a_i\} = \phi.$$

设不破坏上述ii）与iii），而σ不能再加长，则σ称为是极大的。

（76）稳固集S极大$\Longleftrightarrow$不存在关于S的极大奇交错序列σ.

（77）（J.C.Meyer，[1972]）已给简单图 $G=(X,E)$，其顶点集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$满足条件

$$1 \leqslant d_G(x_1) \leqslant d_G(x_2) \leqslant \cdots \leqslant d_G(x_n).$$

设对某一整数p：$2 \leqslant p \leqslant n$，有

$$d_G(x_n) + \cdots + d_G(x_{n-p+2}) \leqslant n - p$$

$\longrightarrow$每一个稳固集，其维小于p的，如含在一个p维的稳固集内.

（78）（C.Berge，[1960]）简单n阶图 $G=(X,E)$，其极大次为$h \Longrightarrow$每一个极大稳固集，其维至少是$\left[\frac{n}{h+1}\right]^*$，其中$\left[\frac{n}{h+1}\right]^*$为大于或等于$\frac{n}{h+1}$的最小整数。

（79）稳固数$\beta_0(G) \geqslant \left[\frac{n}{h+1}\right]^*$，而且这个结果是可能最好的。

（80）（Turán，[1941]）任给一个图集

$$\mathscr{H} = \{G=(X,E)/|X|=n,\ \beta_0(G) \leqslant k\}$$

阶统为n，稳固数$\leqslant k \Longrightarrow$其中边数可能最少的图，同构于$G_{n,k}$.

（81）设G是一个简单图，n个顶点，m条边，且$\beta_0(G)=k \longrightarrow m \geqslant (q-1)\left(n-\frac{kq}{2}\right)$，

其中$q=\left[\frac{n}{k}\right]^*$，且式中等号成立的充要条件是$G \cong G_{n,k}$.

（82）设$G=(X,E)$是一个简单图，n个顶点，m条边$\Longrightarrow \beta_0(G) \geqslant \frac{n^2}{2m+n}$，

其等号成立，当且仅当图G的联接的分子图是同维的集团.

（83）设$G=(X,E)$是一个简单图，n个顶点，m条边$\Longrightarrow \beta_0(G) \geqslant \frac{2n-m}{3}$，

等号成立的充要条件是G的每一联接的分子图是一个2-集团或3-集团.

（84）（Zarankiewicz，[1947]）设G是一个n顶的简单图，且具极大次h，令$k=\left[\frac{n}{h+1}\right] \Longrightarrow \beta_0(G) \geqslant k$；若$G$不含$k$个互质的集团，每个集团具同维$n/k$，则更有$\beta_0(G) > k$.

（85）图$H=(X,(M_1-M_2)\cup(M_2-M_1))$里顶点的极大次数是2.（此处$M_1$与$M_2$为给定的并列集；下同.）

(86) 已知图$G=(X,E)$，在其上作二并列M_1与M_2，作图$H=(X,(M_1-M_2)\cup(M_2-M_1))$ ⟶图H的分子图是：

i）孤立点；

ii）交错链，其边在M_1与M_2里．当链是奇长时，其两个端点或是M_1的两个非饱和点，或是M_2的两个非饱和点；当链是偶长时，其两个端点，分别是M_1与M_2的非饱和点．

iii）用M_1与M_2的边构成的偶交错圈．

(87) (Berge，[1957]) 在图$G=(X,E)$里并列集M是极大的⟺图G不含关于M的镶边交错链．

(88) (Norman，Rabin，[1959]) 已给简单图$G=(X,E)$，其阶是n，又设M_0是一个极大并列集，C_0是一个极小覆盖集⟹

$$|M_0|+|C_0|=n.$$

(89) (König，Egervary，[1931]) 在二分图$G=(Z,Y;E)$上，极大并列集的维等于极小径集的维．

(90) (P.Hall，[1934]) 已给二分图$G=(X,Y;E)$，顶点集X可以在顶点集Y上配对⟺

$$|\Gamma_G(A)|\geqslant|A|, \qquad (A\subset X)$$

(91) (M.Hall，[1948]) 已给二分图$G=(X,Y;E)$，满足定理(90)的条件，令$|X|=m$，$\min|\Gamma_G(x)|=t>0(x\in X)$ ⟹X可以在Y上配对，且配对方法的个数至少是

$$r(t,m)=\prod_{1\leqslant i\leqslant\min(t,m)}(t+1-i).$$

(92) (Ore，[1955]) 已给二分图$G=(X,Y;E)$，设 $\alpha=\max\{|S|-|\Gamma_G(S)|\}$，$(S\subset X)$ ⟹$\beta_1(G)=m-\alpha$ (β_1表示极大并列集的维)．

(93) (Berge，[1958]) 已给简单图$G=(X,E)$，其阶为n，且 $d=\max\{q(G-S)-|S|\}$，$(S\subset X)$ ⟹G中被并列集饱和的顶点的个数最多是$n-d$．(其中$q(G-S)$是图$G-S$中奇支的个数，即有奇数个点的支的个数)．

(94) 取n为阶，β_1为其极大并列集的维，$S\subset V(G)$使$G-S$中所含奇支的个数为q，且使$q(G-S)-|S|$达到极大；令$|S|=s$，而n、q、β_1、s满足下列关系：

i）$q=n+s-2\beta_1$，

ii）$s\leqslant\beta_1\leqslant n/2$，

⟹极大图G，满足上述要求的，必是下列形式：

$$G=K_s+\bigcup_{i=1}^{q}K_{2n_i+1},$$

其中$\sum_{i=1}^{q}(2n_i+1)=n-s$．

(95) (Erdös Gallai[1961]) 已给二非负整数n，β_1，$n\geqslant2\beta_1$ ⟹极大图G以n为阶，以β_1为极大并列集的维，其极大边数是

① $\binom{2\beta_1}{2}$ 当$n=2\beta_1$；

②$\max\left\{\binom{2\beta_1+1}{2}, \binom{\beta_1}{2}+\beta_1(n-\beta_1)\right\}$　当$n>$.

i）当$2\beta_1+1\leqslant n<(5\beta_1+3)/2$，$K_{2\beta_1+1}\cup E_{n-2\beta_1-1}$是唯一的极大图，其边数是$\binom{2\beta_1+1}{2}$

ii）当$n>(5\beta_1+3)/2$，$K\beta_1+E_{n-\beta_1}$是唯一的极大图，其边数是$\binom{\beta_1}{2}+\beta_1(n-\beta_1)$；

iii）当$n=(5\beta_1+3)/2$，有二极大图$K_{2\beta_1+1}\cup E_{n-2\beta_1-1}$与$K_{\beta_1}+E_{n-\beta_1}$，其边数为$\beta_1(2\beta_1+1)$。（此处$E_n$表示$K_n$的补图，即具$n$个顶点而没有边的图）。

（96）一个图G中的一个点v是临界的$\Longleftrightarrow$有某个极小点覆盖含有v。

（97）一个图的任何两条邻接的临界边在一个奇圈上。

（98）每一个边临界图是一个块，其中任何两条邻接的边在一个奇圈上。

（99）一个二分图的任何两条临界边是独立的。

（100）对任何一个图G，G有一个边核$\Longleftrightarrow G$有一个外部的极小点覆盖$\Longleftrightarrow G$的每一个极小点覆盖是外部的。

（101）一个图G与它的边核$C_1(G)$相等$\Longleftrightarrow$它是二部的且是不可约的。

4. 因子分解

（102）完全图K_{2n}是1-可因子化的。

（103）每一个正则双图是1-可因子化的。

（104）一个2-连通图有一个1-因子$\Longrightarrow$至少有二个不同的1-因子。

（105）（Tutte，[1947]），简单图$G=(X,E)$有完美并列集（1-因子）$\Longleftrightarrow q(G-S)\leqslant|S|$，$(S\subset X)$。其中$q(G-S)$是图$G-S$中奇支的个数。

（106）令G是一个给定的图，且令f是从V到非负整数中的一个函数。G中没有由f给定的度序列的生成子图$\Longleftrightarrow$存在不相交的点集s和T，使得$\sum_{u\in s}f(u)<K_e(S,T)+\sum_{v\in T}[f(v)-d_{G-S}(v)]$。（其中，$K_e(S,T)$记$G-(S\cup T)$中使$q(H,T)+\sum_{u\in H}f(u)$为奇数的支$H$的数目；$q(H,T)$是$G$中联结$H$的一个点和$T$的一个点的边之数目）。

（107）图K_{2n+1}是n个生成圈的和。

（108）图K_{2n}是一个1-因子和$n-1$个生成圈的和。

（109）每一个没有桥的三次图是一个1-因子和一个2-因子之和。

（110）一个连通图是2-可因子化的$\Longleftrightarrow$它是偶数度正则的。

（111）令G是一个非平凡的(p,q)图，又令q_n是G的任何一个有n个点的子图中边的最多数目$\Longrightarrow \Upsilon(G)=\max_n\left\{\frac{q_n}{n-1}\right\}$。

（112）完全图和完全双图的荫度为

$$\Upsilon(K_p)=\left\{\frac{p}{2}\right\}\text{和}\Upsilon(K_{r,s})=\left\{\frac{rs}{r+s-1}\right\}.$$

5. 可着色性

（113）$\chi(K_p)=p$；$\chi(K_{m,n})=2$；$\chi(K_p-x)=p-1$；

$\chi(C_{2n})=2$；$\chi(\bar{K}_p)=1$；$\chi(C_{2n+1})=3$；

$\chi(T)=2$（对任一非平凡树T）。

（114）图G是1色的$\Longleftrightarrow G$是全不连通的；

图G是可双色的$\Longleftrightarrow G$无奇圈。

（115）对任一图G，$\chi(G)\leqslant 1+\max\delta(G')$，其中极大对$G$的所有导出子图$G'$取。

（116）对任一图G，色数至多比最大的度大1，即$\chi\leqslant 1+\Delta$。

（117）若$\Delta(G)=n$，除了

i）$n=2$而G有一个支是一个奇圈，或

ii）$n>2$而K_{n+1}是G的一个支，

$\Longrightarrow G$是n-可着色的。

（118）对于任何一个图$G\Longrightarrow$

$$p/\beta_0\leqslant\chi\leqslant p-\beta_0+1.$$

（119）对每两个正整数m和$n\Longrightarrow$存在一个围长超过m的n色图。

（120）对于任何一个图$G\Longrightarrow\chi$和$\bar{\chi}$的和与积满足不等式

$$2\sqrt{p}\leqslant\chi+\bar{\chi}\leqslant p+1,$$

$$p\leqslant\chi\bar{\chi}\leqslant\left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

（121）对于任何一个图$G\Longrightarrow$

$\psi+\bar{\chi}<p+1$.

（122）对于任何一个图$G\Longrightarrow$

$\psi\leqslant p-\beta_0+1$.

（123）设G是一个n阶的简单图，β_0是其稳固数，χ是其色数$\Longrightarrow$

$$\begin{cases}\beta_0\cdot\chi\geqslant n,\\ \beta_0+\chi\leqslant n+1.\end{cases}$$

（124）（Geddum，Nordhaus[1960]）设$\bar{G}$是G的补图$\Longrightarrow\chi(G)+\chi(\bar{G})\leqslant n+1$.

（125）设简单图$G=(X,E)$，具n个顶点、m条边$\Longrightarrow\chi(G)\geqslant n^2/(n^2-2m)$.

（126）（Heawood地图着色定理）对于每一个正整数n，亏格等于n的可定向曲面的色数由下式给出：

$$\chi(S_n)=\left[\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right],\qquad (n>0).$$

（127）（五色定理）每一个可平面图（见后四－（二）－（Ⅵ））是5-可着色的。

（128）（四色定理）（4CC）每一个可平面图是4-可着色的。

$\Longleftrightarrow$（a）每一个三次的无桥的平面地图是4-可着色的；

（b）每一个哈密顿可平面图是4-可着色的；

（c）每一个无桥的三次可平面图G，$\chi'(G)=3$；

（d）每一个无桥的三次可平面图是1-可因子分解的；

（e）（当G是连通的平面地图时）G的三个子图G_1、G_2、G_3之和，使得对每一个点v，每一个G_i中关联于v的边的数目都是偶数或都是奇数。

（129）每一个只有4个以下三角形的可平面图是3-可着色的。

(130) 每一个没有三角形的可平面图是3-可着色的。

(131) (Hadwiger 猜想)每一个连通的n色图可以收缩到K_n。($n\leqslant 4$时已证)。

(132) Hadwiger 猜想在$n=5$时等价于四色定理。

(133) 对任一图$G\Longrightarrow \Delta\leqslant X'\leqslant \Delta+1$。($\Delta$为其最高次)。

(134) 设K_n是简单完全图$\Longrightarrow$

$$X'(K_n)=\begin{cases} n-1 & (n\text{为偶数}), \\ n & (n\text{为奇数}). \end{cases}$$

(135) 设K_n的最高次是$\Delta\Longrightarrow$

$$X'(K_n)=\begin{cases} \Delta & (n\text{为偶数}), \\ \Delta+1 & (n\text{为奇数}). \end{cases}$$

(136) 设多重的二分图$G=(X,Y;E)$的最高次为$\Delta\Longrightarrow X'(G)=\Delta$。

(137) (Vizing, [1964]) 设G是一个无环的多重图，具m条边，极大次是h，l是极大并列集的维$\Longrightarrow$ $X'(G)\geqslant \max\left\{h,\left[\dfrac{m}{l}\right]^*\right\}$.

(138) (不着色引理)设G是一个无环的多重图，其$X'(G)=q+1$，设除一边$[a,b]_c$未染色以外，已用q种彦色($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$)涂染了$G$的边。又用$C_x$表示在顶点$x$上涂染各边所用彦色的集合$\Longrightarrow$

$$|C_a\cup C_b|=q,\quad |C_a\cap C_b|=d_G(a)+d_G(b)-2-q,$$
$$|C_a-C_b|=q-d_G(b)+1,\quad |C_b-C_a|=q-d_G(a)+1.$$

(139) 设图G是一个形如图$[x_1,x_2,\cdots,x_n,x_1]$的图，但其相邻点之间，可能含有多条边，若G的边数是m，极大次是$h\Longrightarrow$

$$X'(G)=\begin{cases} h & \text{当}n\text{是偶数}, \\ \max\left\{h,\left[\dfrac{2m}{n-1}\right]^*\right\} & \text{当}n\text{是奇数}. \end{cases}$$

(140) 设G是一个无环的多重图，令$[a,b]_c$是其一边，$G'=G-[a,b]_c$，设G'可q-边-着色，$q\geqslant d_G(a)$，$q\geqslant d_G(b)$，且设$x\in \Gamma_{G'}(a)\Longrightarrow d_{G'}(x)+m_{G'}(a,x)\leqslant q\Longrightarrow$图$G$可$q$-边-着色。

(141) 设$G=(X,E)$是一个无环的多重图，并设

$$d_G^*(x)=d_G(x)+\max_{y\in X}m_G(x,y)$$

$$\Longrightarrow \qquad X'(G)\leqslant \max_{x\in X}d_G^*(x).$$

(142) (Vizing定理[1964]) 设G是一个无环的多重图。其重复度是

$$\max_{x,y}m_G(x,y)=p,$$

极大次是$h\Longrightarrow$ $X'(G)\leqslant h+p$.

(143) 设G是一个简单图，其极大次为h

$$\Longrightarrow \qquad h\leqslant X'(G)\leqslant h+1.$$

(144) 设G是一个无环的多重图，其极大次为$h=3\Longrightarrow X'(G)=3$或$4$。

(145) (O.Ore, [1968]) 设G是一个无环的多重图，其极大次是$h\Longrightarrow$

$$\chi'(G)\leqslant\max\left\{h,\ \max_{(x_1,x_2,x_3)}\left[\frac{1}{2}(d_G(x_1)+d_G(x_2)+d_G(x_3))\right]\right\},$$

其中括号内的极大，是对一切长度为2的初级链$[x_1,x_2,x_3]$而取的。

(146) (S.annon[1949]) 设G是一个无环的多重图，极大次为$h\Longrightarrow$

$$\chi'(G)\leqslant\left[\frac{3h}{2}\right].$$

(147) 设图G，简单、无环，n个顶点、m条边，极大次是Δ，若$m>\Delta\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\Longrightarrow G$是第二型的。（注：若$\chi'(G)=\Delta$，称$G$为第一型的；若$\chi'(G)=\Delta+1$，称$G$为第二型的）。

(148) 设G是一个奇阶的正规图$\Longrightarrow G$是第二型的。

(149) 设H是一个奇阶的正规图，最高次为Δ，而图G是由H任意去掉不多于$\frac{\Delta}{2}-1$条边所得的图$\Longrightarrow G$是第二型的。

(150) 设H是一个偶阶的正规图，G是任一图，为在H的一边上加进一顶点所得的图$\Longrightarrow G$是第二型的。

(151) 在一个唯一的n-可着色图的n-着色中$\Longrightarrow$
由任何两个色组的并导出的子图是连通的。

(152) 每一个唯一的n-可着色图是$(n-1)$-连通的。

(153) 在一个唯一n-可着色图的任何一个n-着色中，由任何K个色组的并，$2\leqslant K\leqslant n$，导出的子图是$(K-1)$-连通的。

(154) 对于所有$n\geqslant3$，有一个唯一的n-可着色图，它不含有同构于K的子图。

(155) 令G为一个3-色平面图．若G含有一个三角形T，使得对于G的每一个顶点v有一个三角形的序列T，T_1，T_2，$\cdots$，T_m，使得序列中相继的三角形有一条公共边，而v在T_m中$\Longrightarrow$ G是唯一3-可着色的。

(156) 一个2-连通3色平面图G有至多一个区域不是三角形$\Longrightarrow G$是唯一3-可着色的。

(157) G是一个至少有4个点的唯一3-可着色可平面图$\Longrightarrow$ G至少含有二个三角形。

(158) 每一个唯一4-可着色可平面图是最大可平面图。

(159) 没有唯一5-可着色的可平面图。

(160) G是临界图$\Longrightarrow$

(1°) 对每一点v，$\chi(G-v)=\chi(G)-1$；

(2°) G是连通的；

(3°) G是一个块；

(4°) 没有一个可被一个完全子图所分离；

(5°) 每一个点割集含有两个不邻接的点。

(161) G是一个n-临界图$\Longrightarrow$

(1°) $\delta(G)\geqslant n-1$ （δ为顶点的最低次）；

(2°) $n\geqslant3$时，则或者G是哈密顿的（见后面四-(二)-(Ⅱ)），或者G的周长至少为$2n-2$。

(162) 每个可K-着色的图，至少有K个顶点，其次数至少是$K-1$。

(163) 设图G的极大次是$\Delta\Longrightarrow$

$\chi(G)\leqslant\Delta+1$.

(164) 在一个K-临界图中，没有断集是一个集团.

(165) (Dirac[1953]) 设图G是K-临界的，有一个2顶的断集$\{U,V\}$，U与V不相邻$\Longrightarrow$ $G=G_1\cup G_2$,

其中G_1与G_2是G的二片（在图G中，除去断集A，可得若干个联接的分子图；每个分子图与断集联合，是一个联接的部分子图，称为原图的片），且G_1的每一种$(K-1)$-着色，使U、V同色而G_2的每一种$(K-1)$-着色，均使U、V异色.

(166) 设G是K-临界的，有一个两点的断集$\{U,V\}\Longrightarrow$

$$d(U)+d(V)\geqslant 3K-5.$$

(167) (Brooks, [1941]) 设G是一个简单的联接图，且若G既不是奇圈，也不是一个完全图$\Longrightarrow\chi(G)\leqslant\Delta$

其中$\chi(G)$是G的色数，Δ是G的顶点的最高次

(168) G是一个连通的无割点的n色图，它恰含一个度超过n-1的点$\Longrightarrow G$是n-边临界的.

(169) G是一个n-边临界图，$n\geqslant 4$，且不是完全的$\Longrightarrow 2q\geqslant(n-1)p+n-3$.

(170) Δ——边临界图不含断点（Δ为极大次）.

(171) 设G是$\Delta+1$-边临界的，a、b是G中任二相邻点$\Longrightarrow d_G(a)+d_G(b)\geqslant\Delta+2$.

(172) 设G是$\Delta+1$-边临界的$\Longrightarrow$每一顶点至少和两个极大次顶点相邻.

(173) 完全图K_p: $f(K_p,t)=t(t-1)(t-2)\cdots(t-p+1)=t(p)$.

(174) 全不连通图$\bar{K}_p$: $f(\bar{K}_p,t)=t^p$.

(175) 在一个图G中，u和v是两个不邻接的点，而ε是等同它们的初等同态$\Longrightarrow$

$$f(G,t)=f(G+uv,t)+f(\varepsilon G,t).$$

(176) 对于任何一个图G，$f(G,t)$是t的一个多项式.

(177) 令G是一个图，有p个点、q条边和K个支G_1、G_2、…、$G_k\Longrightarrow$

(1°) $f(G,t)$的次数为p;

(2°) $f(G,t)$中t^p的系数为1;

(3°) $f(G,t)$中t^{p-1}的系数为$-q$;

(4°) $f(G,t)$中常数项为0;

(5°) $f(G,t)=\prod_{i=1}^{K}f(G_i,t)$;

(6°) $f(G,t)$中有非零系数的t的最小次数为k.

(178) 每一个色多项式的系数的符号是正负交替的.

(179) 一个有p个点的图G是一个树$\Longleftrightarrow$

$f(G,t)=t(t-1)^{p-1}$

(180) n个孤立点构成图$G\Longrightarrow$其着色多项式为 $\Pi_k(G)=k^n$.

(181) 着色多项式

$\Pi_k(G)=\Pi_k(G-e)-\Pi_k(G\cdot e)$,

其中$G-e$示G去掉其e边；$G\cdot e$示再将e的两个端点合并成一点。

（182）［附］待解决的问题：

（1°）同一个色多项式的图的特征问题；

（2°）决定怎样的多项式是色多项式；

（3°）（里德猜想）每一个色多项式的系数的绝对值先是严格递增的，然后是严格递减的且一直保持如此。

6．可计数性

（A）标定图：

（183）有p个点的标定图的数目等于$2^{\binom{p}{2}}$

（184）标定图（p,q）的数目等于$\binom{\binom{p}{2}}{q}$，

（185）有p个点的标定树的数目等于p^{p-2}。

（186）用来标定一个给定的图的方式的数目等于$p!/|\Gamma(G)|$。

（B）Polya计数定理：*

（187）令A为作用在集X上的一个置换群，它有轨θ_1、θ_2、…、θ_n，又令ω是一个函数，它对每一个轨指定一个权。此外，ω也定义在X上，使当$x\in\theta_i$时，$\omega(x)=\omega(\theta_i)\Longrightarrow$轨的权的和由下式给出：

$$|A|\sum_{i=1}^{n}\omega(\theta_i)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{x=\alpha x}\omega(x).$$

（188）（Burnside引理）置换群A的轨的数目$N(A)$由下式给出：

$$N(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}j_1(\alpha).$$

（189）（Polya计数定理）构形计数级数可以由将图形计数级数代入到构形群的循环指标中去而得到，即

$$C(x,y)=Z(A,C(x,y)).$$

（190）A是作用在X上的一个置换群$\Longrightarrow$由A导出的X的n-子集的轨的数目是$Z(A,Hx)$中x^n的系数。

（191）令$Z(A)$和$Z(B)$给出A和B的二元运算：和、积、合成和幂群的循环指标。

$$Z(A+B)=Z(A)Z(B);$$

$$Z(A\times B)=\frac{1}{|A|}\frac{1}{|B|}\sum_{(\alpha,\beta)}\prod_{r,s=1}^{\alpha,s}a_{m(r,s)}^{d(r,s)j_r(\alpha)j_s(\beta)}$$

（其中$d(r,s)$和$m(r,s)$分别是最大公约数和最小公倍数）；

$$Z(A[B])=Z(A)[Z(B)];$$

$$Z(B^A)=\frac{1}{|A|\cdot|B|}\sum_{(\alpha;\beta)}a_k^{j_k(\alpha;\beta)}.$$

（其中$(\alpha;\beta)=\beta^\alpha$；$j_1(\alpha;\beta)=\prod_{k=1}^{\alpha}\left(\sum_{s|k}s\,j_s(\beta_s)\right)^{j_k(\alpha)}$；而对于$k>1$，$j_k(\alpha;\beta)=$

---

* 以下所论及的群的概念见后面三-（二）—（Ⅲ）

$\frac{1}{k}\sum_{s|k}\mu\left(\frac{k}{s}\right)j_s(\alpha^s;\beta^s)$。其中$\mu$是熟知的数论的麦比乌斯函数)。

（C）图的计数：

令g_{pq}为(p,q)图的数目，$g_p(x)=\sum_q g_{pq}x^q$。

令$V=\{1,2,\cdots,p\}$，$R=\{0,1\}$。

用$D=V^{(2)}$记V的不同的元素的子集$\{i,j\}$的集，即V的2-子集的集．则由D到R中的每个函数f代表一个图，这个图的p个点是V的元素，其中，当$f\{i,j\}=1$时，i邻接于j。

R上的权函数ω由$\omega(0)=0$和$\omega(1)=1$定义，故为恒等函数．

函数f的权由$W(f)=x^{\sum\omega(f(\{i,j\}))}$给出，其中，求和是对于$V^{(2)}$中所有的对$i,j$取的．于是函数$f$的权的是相应于$f$的图中边的数目．

令E_1是作用在R上的单位元素群，又令S_p作用在V上．用$S_p^{(2)}$来记对群，它作用在$V^{(2)}$上，它的置换由S_p导出；即对S_p中每一个置换α，在$S_p^{(2)}$中有一个置换α'，使

$$\alpha'\{i,j\}=\{\alpha_i,\alpha_j\}。$$

（192）有p个点的图的计数多项式为

$$g_p(x)=Z(S_p^{(2)},1+x)。$$

其中，$$Z(S_p^{(2)})=\frac{1}{p!}\sum_{(j)}\frac{p!}{\prod_{k=1}^{p}j_k!\,K^{j_k}}\prod_{k=1}^{[p/2]}(a_k a_{2k}^{k-1})^{j_{2k}}\cdot\prod_{k=0}^{[(p-1)/2]}a_{2k+1}^{kj_{2k+1}}$$

$$\prod_{k=1}^{[p/2]}a_k^{K\binom{j_k}{2}}\prod_{1\leqslant r<s\leqslant p-1}a_{m(r,s)}^{d(r,s)j_rj_s}$$

（193）有p个点的有根图的计数多项式为

$$Y_p(x)=Z((S_1+S_{p-1})^{(2)},1+x)。$$

（194）至多有两条边联结每一对点的多重图的计数多项式为

$$g_p^{*}(x)=Z(S_p^{(2)},1+x+x^2)。$$

（195）有p个点的多重图的计数多项式为

$$m_p(x)=Z\left(S_p^{(2)},\frac{1}{1-x}\right)$$

（196）有p个点的有向图的计数多项式为

$$d_p(x)=Z(S_p^{[2]},1+x)。$$

其中，

$$Z(S_p^{[2]})=\frac{1}{p!}\sum_{(j)}\frac{p!}{\prod_{k=1}^{p}j_k!\,K^{j_k}}\prod_{k=1}^{p}a_k^{(k-1)j_k+2k\binom{j_k}{2}}\prod_{1\leqslant r<s\leqslant p-1}a_{m(r,s)}^{2j_rj_sd(r,s)}。$$

（D）树的计数：

（197）有根树的计数级数由下式给出：

$$T(x)=x\prod_{r=1}^{\infty}(1-x^r)^{-T_r}。$$

(T_r是有r个点的有根树的数目)。

(198) 有根树的计数级数满足函数方程

$$T(x)=x\exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}T(x^r).$$

(199) 对于任何一个树T，令p^*和q^*分别是点和边的相似类的数目，又令S是对称边的数目$\Longrightarrow S=0$或1，且有$p^*-(q^*-S)=1$.

(200) 从一个有n个可交换的元素的集到一个具有图形计数级数$C(x)$的集中的1-1函数的构形计数级数$C(x)$，可将$C(x)$代入$Z(A_n-S_n)$中得到：

$C(x)=Z(A_n-S_n,C(x))$。

(201) 用有根树的计数级数来表示的树的计数级数由下列方程给出：

$$t(x)=T(x)-\frac{1}{2}[T^2(x)-T(x^2)].$$

(202) 同胚不可约树由下列三个方程来计数：

$$\bar{H}(x)=\frac{x^2}{1+x}\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\bar{H}(x^r)}{rx^r};$$

$$H(x)=\frac{1+x}{x}\bar{H}(x)-\frac{1}{2x}[\bar{H}^2(x)-\bar{H}(x^2)];$$

$$h(x)=H(x)-\frac{1}{x^2}[\bar{H}^2(x)-\bar{H}(x^2)].$$

($h(x)$、$H(x)$和$\bar{H}(x)$ 分别是同胚不可约树、有根树和植树的计数级数)。

(203) 令$u(x)$和$U(x)$分别为么树和么有根树的计数级数$\Longrightarrow U(x)=x\exp\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{U(x^n)}{n}$;

$$u(x)=U(x)-\frac{1}{2}[U^2(x)+U(x^2)].$$

(E) 幂群计数定理：

(204) R^D中由幂群B^A所决定的函数的等价类的数目等于

$$N(B^A)=\frac{1}{|B|}\sum_{\beta\in B}Z(A;\ m_1(\beta),m_2(\beta),\cdots,m_d(\beta)),$$

其中，$m_k(\beta)=\sum_{s|k}sj_s(\beta)$.

(205) 有p个点的自补图的数目S_p等于

$S_p=Z(S_p^{(2)};0,2,0,2,\cdots)$.

(F) [附]未解决的图的计数问题：*

(1°) 有向图：强有向图，单侧有向图，有源有向图，可迁有向图，自补且自逆的有向图。

(2°) 可行遍性：哈密顿圈，一个给定的图中的哈密顿圈，一个给定的图中的欧拉迹。

---

* 有的已部分地解决，请参阅有关文献。

(3°) 拓扑的：单纯复形，K色图，可平面的K色图，有根可平面图，有边根的平面地图。

(4°) 对称性：对称图，么图，有给定的自同构的图。

(5°) 应用：一个标定3-格的偶子图，有给定面积的一个标定2-格的偶子图，一个给定的标定图的偶子图，一个2-格的铺砌，兽图。

(6°) 其它：边图，拉丁方，有给定的半径或直径的图，有给定的围长或周长的图，有给定的连通度的图，有给定的亏格、厚度、色数等等的图。

【术语解释】

(1°) 有边根的平面地图由一个平面地图如下地得到：将任意一条边定向，然后指定与这条边关联的两个面之一为地图的外部面。

(2°) 一个2-格是一个图，它的点是整数的有序偶 (i,j)，其中 $i=0、1、\cdots、m$，$j=0、1、\cdots、n$；两个点当它们在笛卡尔平面上的距离等于1时邻接（一个3-格类似地定义）。

(3°) G的一个偶子图H是一个每个点的度均为偶数的子图。

(4°) 2-格的一个铺砌是指用给定数目的单个的单位正方形和由二个正方形拼成的骨牌形对格的方格的一个覆盖。

(5°) 兽图是一个含有给定的数目的三角形、正方形和正六角形的单连通构形。

（四）题　　解

1、连通性

(1) 证明G连通的充要条件是，对于把V分为两个非空子集V_1和V_2的每个分划，总存在一条边其一端点在V_1中而另一端点在V_2中。

证：“⇒” 若G连通，对任一$v_1\in V_1$和$v_2\in V_2$必有(v_1,v_2)-通路，设为$P=(v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_{m+1}})$。设$v_{i_r}$是序列中从前面数最后一个属于$V_1$的点，这时 $1\leqslant r\leqslant m$，$v_{i_1}=v_1$，$v_{i_{m+1}}=v_2$。因为$v_{i_1}=v_1\in V_1$，故这样的v_{i_r}总是存在。故v_{i_r}、$v_{i_{r+1}}$邻接的边$v_{i_r}v_{i_{r+1}}$便满足其一个端点在V_1中，一个端点在V_2中。

“⇐” 反之，若对于把V分为两个非空子集V_1和V_2的每个分划总存在一条边其一端点在V_1中，而另一端点在V_2中，则G必为连通的。因否则G至少有两个连通分支，令一个连通分支的顶点集为V_1，其余的顶点集为V_2，则不存在一条边其一端点在V_1中，另一端在V_2中，矛盾。

(2) ①证明：若G是简单图，且$\varepsilon>\binom{\nu-1}{2}$，则$G$连通；

②对于$\nu>1$，找出一个$\varepsilon=\binom{\nu-1}{2}$的非连通简单图。

证：①用反证法，否则G至少有两个连通分支，设其中一个分支有K个点$(K\geqslant1)$，于是$\varepsilon\leqslant\binom{K}{2}+\binom{\nu-K}{2}$。由$K\geqslant1$，易证

$$\binom{K}{2}+\binom{\nu-K}{2}\leqslant\binom{\nu-1}{2},$$

这与$\varepsilon>\binom{\nu-1}{2}$矛盾。

②$\nu-1$个点组成的完全图再加一个孤立点即得所求之图。

(3) ①证明若G是简单图，且$\delta > \left[\frac{\nu}{2}\right] - 1$，则$G$连通。

②当ν为偶数时，找出一个非连通的$\left(\left[\frac{\nu}{2}\right] - 1\right)$-正则简单图。

证：①用反证法，否则，G至少有两个连通分支，但至少有一个分支的顶点个数$\leqslant \left[\frac{\nu}{2}\right]$，这个分支中顶点的次数最大为$\left[\frac{\nu}{2}\right] - 1$，这是因为$G$是简单的，这与$\delta > \left[\frac{\nu}{2}\right] - 1$矛盾。

②有两个连通分支，每个分支有$\left[\frac{\nu}{2}\right]$个顶点的完全图，即为所求的图。

(4) 证明：若G非连通，则G^c连通。

证：若u、$v \in V(G)$在G中不邻接，则在G^c中邻接，否则u、v邻接，于是它们必在G的同一个连通分支中。设W不属于这个连通分支，则在G中W与u、v不邻接，于是在G^c中W与u、v邻接，故u，v连通，从而G^c中的任两点都连通，因此G^c连通。

(5) ①证明：若$e \in E$，则$\omega(G) \leqslant \omega(G-e) \leqslant \omega(G) + 1$；

②设$v \in V$，证明：在上面的不等式中，通常不能用$G-v$代替$G-e$。

证：①此为边e只能属于一个分支，这样只要证明：一个分支去掉一条边，最多分成两个分支，所以问题不妨简单地置于连通图中加以讨论。显然$\omega(G-e) \geqslant \omega(G)$。若记$e=(u, v)$，则去掉$e$后，有两种可能：

i) 在G中，u、v之间只有一条通路$P = uev$，这样G中的顶点分成两大类，第一类顶点与u之间有通路，但任何这样的通路不经过e；第二类顶点与v之间有通路，但任何这样的通路也不经过e；而第一类与第二类顶点之间的通路必定经过P。故去掉e后，第一、第二两类顶点分别成为两个连通分支，在此情形下$\omega(G-e) = \omega(G) + 1$；

ii) 在G中，u、v之间去掉e边后，仍然连通，显然此时$\omega(G-e) = \omega(G)$。

∴对任何$e \in E$，必有$\omega(G) \leqslant \omega(G-e) \leqslant \omega(G) + 1$。

②如G：



$\omega(G-v) = 3$，$\omega(G) = 1$。

图2.20

故$\omega(G-v) \leqslant \omega(G+1)$不成立，于是在上面的不等式中不能用$G-v$代替$G-e$。

(6) 证明：若G连通且G的每一个顶点的次数均为偶数，则对任何$v \in V$，$\omega(G-v) \leqslant \frac{1}{2}d(v)$成立。

证：用反证法，否则至少有一个$v \in V$使$\omega(G-v) > \frac{1}{2}d(v)$。令$\omega(G-v) = K$，设$G-v$的分支为$G_1$，$G_2$，……，$G_k$，$K > \frac{1}{2}d(v)$，故至少有一个$G_i$，$K_i \leqslant K$使它与$v$在$G$中只有一条边相连。设$G_i$中与$v$邻接的顶点为$u$，由于$G$中每个顶点的次数为偶数，故$G_i$中其他顶点的次数与$G$中相同但$dG_i(u)$为奇数，这与一个图中奇次数的顶点有偶数个相矛盾。

（7）设G连通且设S是V的非空真子集。证明：当且仅当$G[S]$和$G[\bar{S}]$二者都连通时边割$[S,\bar{S}]$才是G的割集。

证："⇒"用反证法。假设$G[S]$不连通。取$G[S]$中一个分支$G[S']$，则边割$[S',\bar{S}']\subset[S,\bar{S}]$，这与$[S,\bar{S}]$是极小边割矛盾。故$G[S]$，$G[\bar{S}]$均连通。

"⇐"设$G[S]$、$G[\bar{S}]$连通，则对任意$e\in[s,\bar{s}]$，$G-[s,\bar{s}]-e$也是连通的，故$G[S,\bar{S}]$是极小边割，即$[S,\bar{S}]$是割集。

（8）①证明：若G是K－边连通的，且$K>0$，又若E'是G的K条边的一个集合，则$\omega(G-E')\leqslant 2$；

②对$K>0$，找出一个K-连通图G以及G的K个顶点的集合V'，使$\omega(G-V')>2$。

证：①G是K-边连通的，则$K'(G)\geqslant K>0$，即G的任一边割$[S,\bar{S}]$，有$[S,\bar{S}]\geqslant K$，又$|E'|=K$，若E'不是边割，则$\omega(G-E')=1$；若E'是G的边割，必为割集。由上题(7)之结果知：若$E'=[S,S']$，则$G[S]$和$G[\bar{S}]$都是连通的，故有$\omega(G-E')=2$，$\therefore\omega(G-E')\leqslant 2$。

②如：（图中顶点 v_1；v_2 v_3 v_4）是1-连通的，v_1使$\omega(G-v_1)=3>2$。

图2.21

（9）证明：若G是K-边连通的，则$\varepsilon\geqslant K\cdot\nu/2$。

证：$\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon$，$d(v)\geqslant\delta\geqslant K'(G)\geqslant K$，

$\therefore\Sigma d(v)\geqslant\nu K$

即$2\varepsilon\geqslant\nu K$，$\therefore\varepsilon\geqslant K\cdot\nu/2$。

（10）①证明：若G是简单图且$\delta\geqslant\nu-2$，则$K=\delta$；

②找出一个简单图，使$\delta=\nu-3$且$K<\delta$。

证：①用反证法。否则，若$K\neq\delta$，则因$\delta\geqslant K'\geqslant K$，$\therefore K<\delta$，又$\delta\geqslant\nu-2$

$\because G$是简单图，故$\Delta\leqslant\nu-1$，故$\delta\leqslant\nu-1$。

当$\delta=\nu-1$时，显然G是完备图有$K=\nu-1=\delta$，矛盾。

当$\delta=\nu-2$时，若$K<\delta$则$K<\nu-2$，即$K\leqslant\nu-3$。对G去掉少于或等于$\nu-3$个顶点，剩下的顶点不妨设为v_1，v_2，$\cdots v_K$，$(K\geqslant 3)$。若v_1与v_2，$\cdots$，v_K邻接，则$G[v_1,\cdots,v_K]$是连通的；否则不妨设v_1与v_K不邻接，于是v_K因$d(v_K)\geqslant\nu-2$，便与v_1，$\cdots$，v_{K-1}邻接，故$G[v_1,\cdots,v_K]$也是连通的，即G不存在顶点数不大于ν-3顶点割，即$K>\nu-3$，矛盾。$\therefore K=\delta$。

②可找到图G：



图2.22

此时，$\delta=2=5-3=\nu-3$，但$K<\delta$（$\because K=1$）。

（11）证明：若G是简单图且$\delta\geqslant(\nu+K-2)/2$，则$G$是$K$-连通的。

证：用反证法。否则，G必有$(K-1)$-顶点割，设为V_1，$|V_1|=K-1$，$G-V_1$至少有两个分支。$\because|V(G-V_1)|=\nu-(K-1)=\nu-K+1$，$\therefore G-V_1$的两个分支中至少有一个的顶点数$\leqslant\dfrac{\nu-K+1}{2}$。设此分支为$G_1$，故$G_1$中任一顶点$v$至多与$G_1$中的其他的顶点及$V_1$中的顶点都

邻接，即$d(v) \leqslant K-1+\frac{v-K+1}{2}-1=\frac{v+K-3}{2}<\frac{v+K-2}{2} \leqslant \delta$，矛盾。∴$G$是$K$-连通的。

（12）设G连通且设S是V的非空真子集。证明：当且仅当$G[S]$和$G[\bar{S}]$二者都连通时边割$[S, \bar{S}]$才是G的割集。

证："⇒"用反证法。假设$G[S]$不连通。取$G[S]$中一个分支$G[S']$，则边割$[S', \bar{S}'] \subset [S, \bar{S}]$，这与$[S, \bar{S}]$是极小边割矛盾。故$G[S]$、$G[\bar{S}]$均连通。

"⇐"设$G[S]$、$G[\bar{S}]$连通，则对任意$e \in [S, \bar{S}]$，$G-([S, \bar{S}]-e)$也是连通的，故$[S, \bar{S}]$是极小边割，即$[S, \bar{S}]$是割集。

（13）试证：每个边割都是割集的不相交和集。

证：不妨假定G是连通的。设$[S, \bar{S}]$是边割，若它为割集，显然为割集的和集，否则由上题（12）知$G[S]$和$G[\bar{S}]$至少一个是非连通的。设$S=S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r$，当$i \neq j$时，$S_i \cap S_j=\phi$，且$G[S_i]$是$G[S]$的连通分支$r>1$，则$[S_i, \bar{S}_i]$是边割，且$[S, \bar{S}]=\bigcup_{i=1}^{r}[S_i, \bar{S}_i]$。若诸$\bar{S}_i$使$G[\bar{S}_i]$是连通的，由上题（12）知$[S_i, \bar{S}_i]$是割集，显然当$i \neq j$时，$[S_i, \bar{S}_i] \cap [S_j, \bar{S}_j] \neq \phi$，由此得证。否则若存在$1 \leqslant i \leqslant r$使$G[\bar{S}_i]$不连通，则$\bar{S}_i=S_1' \cup S_2' \cup \cdots \cup S_K'$，当$i \neq j$时，$S_i' \cap S_j'=\phi$且$G[S_j']$连通（$1 \leqslant j \leqslant K$），于是由上题（12）知$[S_j', \bar{S}_j']$是割集，若$G[\bar{s}_j']$也是连通的。显然，$\bigcup_{j=1}^{K}[S_j', \bar{s}_j']=[s_i, \bar{s}_i]$，若$G[S_j']$不连通，又可如上面一样对$\bar{S}_j$分解为连通分支的顶点集，图是有限的，这种过程总会停止。故每个边割都是割集的不相交和集。

（14）若G连通且$v \geqslant 3$，证明：

①若G有割边，则G有一个顶点v使$W(G-v)>W(G)$；

②上述的逆命题不成立。

证：①设$e \in E(G)$是G的割边，$e=uv$则$W(G-e)>W(G)$，且由前面题(5)-①知$W(G-e)=2$。设$G-e$的分支为G_1和G_2，不妨设$u \in V(G_1)$，$v \in V(G_2)$，因$v \geqslant 3$，故$V(G_1)$和$V(G_2)$至少有一个的顶点数不少于2。不妨设$|V[G_2]| \geqslant 2$，于是$G-v=G_1 \cup (G_2-v)$。∴$|V(G_2)| \geqslant 2$，∴$G_2-v \neq \phi$，即$G-v$至少有两个分支，即$W(G-v)>W(G)$。

②如图（图2·23）G：



图2.23

显然$W(G-v)>X(G)$，但显然没有割边，即上述的逆命题不成立。

（15）试证：恰好有两个顶点不是割点的简单连通图是一条通路。

证：G是简单连通图，显然G中有极大距离的两点均不是割点。设u、v有极大距离，即(u, v)-通路不能再向两端继续延长了。对每一个简单连通图因是有限图，这样的点总是存在的。又G恰有两个顶点不是割点，则G必恰好只有两个顶点是有极大距离的点。故G是一条通路。

（16）试证：若G是简单的，并且是3-正则的，则$K=K'$。

证：先证简单3-正则图有割点必有割边。因3-正则简单图的任一顶点与三条边关联，故若v是割点，则$W(G-v) \geqslant 2$，故与v关联的三条边中必有一条使它为连接v与$G-v$的一个分支的唯一的一条边，它便是割边。

当$K=1$时，$K'=K=1$；当G不连通时，显然$K=K'=0$。

当$K=3$时，因$\delta \geqslant K' \geqslant K$，又$\delta=3$，即$3 \geqslant K' \geqslant 3$，∴$K'=K=3$。

当$K=2$时，G无割点，由上题（14）-①知G无割边，只要证明G有2-边割便得$K'=2=$

K。

设v_1，v_2为G的2-顶点割，令$S=\{v_1, v_2\}$。

i）若$G-S$有两个分支，若$v_1v_2\in E(G)$，则S与$G-S$共有4条边连接；G无割边，故$G-S$的每个分支必有两条边与v连接，这便是G的2-边割。若$v_1v_2\notin E(G)$则S与$G-S$的两个分支有6条边连接，又G无割点，故连接情况必如下图（图2.24）所示：

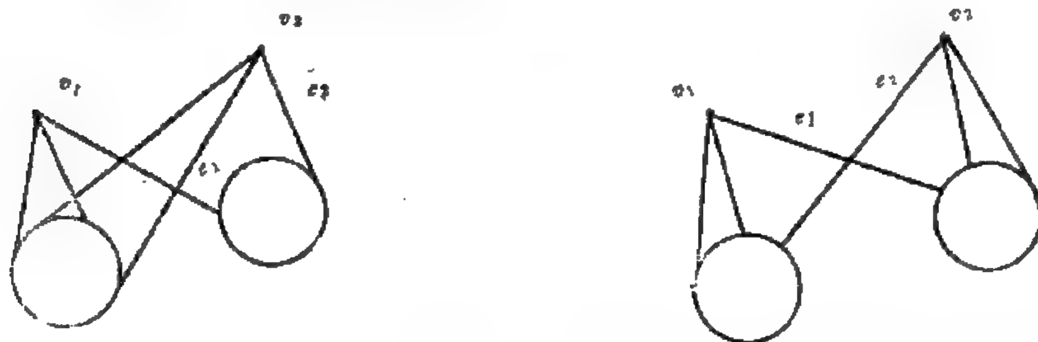


图2.24

于是$\{e_1, e_2\}$为G的2-边割。

ii）若$G-S$有三个分支，因v_1、v_2不是割点，又G无割边。故其连接情况必如下图(图2.25)所示：

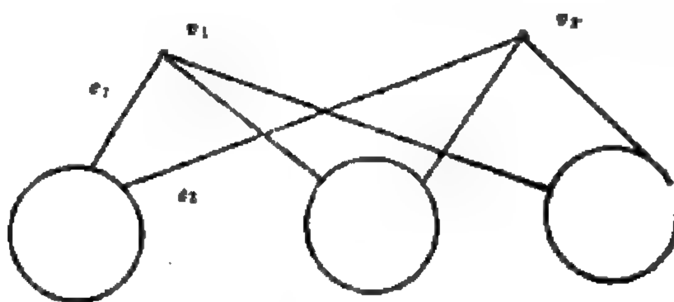


图2.25

于是$\{e_1, e_2\}$为G的2-边割；因G无割点，故$G-S$的分支数不能大于3。

$\therefore K=2$时，有$K'=2=K$，又$K\leqslant\delta=3$

综上所有情形，得知G是简单的，且是3-正则的，则$K=K'$。

（17）举例说明：若在2-连通图中P是一条(u, v)-通路，则G不一定包含一条与P内部不相交的(u, v)-通路θ。

解：如图（图2.26）G是2-连通的，但不包括与$P=(u, u_1, u_2, v)$内部不相交的道



图2.26

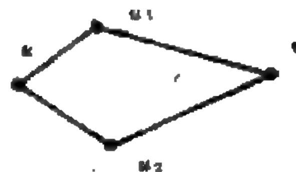


图2.27

路。

而图（图2.27）H中，对$P=(u, u_1, v)$显然含与内部不相交的通路(u, u_2, v)，此图是2-连通的。

（18）试证：当且仅当某图的任意两个顶点，由至少两条边不重并的通路连通时，此图是2-边连通的。

证：“⇒”若图G中任意两点间都至少有两条边不重并的通路所连通时，显然对任意$e\in E(G)$，$G-e$是连通的，即G不存在1-边割，故G为2-边连通。

“⇒”若G为2-边连通，则G无割边，将G分解成块，则块与块之间将以G中的割点相互连接。对于任意的顶点u和v而论，若u、v同属于G的某一块，则由上题（17）知结论成立。若u、v属于G的不同块，为简述计，令$u\in B_1$，B_2，…，$v\in B_n$，其中块B_i与B_{i+1}以割点v_i相互连接。由于G是2-边连通的，故$\nu(B_i)\geqslant 3$（$i=1, 2, \cdots, n$）。于是由上题（17）知，在B_1中存在两条由u到v_1的边不重并的通路P_{11}、P_{12}；在B_i（$i=2, 3, \cdots, n-1$）中存在两条由v_{i-1}到v_i的边不重并的通路P_{i1}、P_{i2}；在B_n中存在两条由v_{n-1}到v的边不重并的通路P_{n1}、P_{n2}，于是我们找到了两条由u到v的边不重并的通路如下：$P_{11}\cup P_{21}\cup\cdots\cup P_{n1}$和$P_{21}\cup P_{22}\cup\cdots\cup P_{n2}$。

（19）试证：若G无偶回路，则G的每个块是K_2或是奇回路。

证：G无偶回路，G的块自然可以是K_2；若G的块不是K_2，可证必有奇回路。不为K_2的块G_1必为$\nu\geqslant 3$。由上题（17）可知G_1必含回路，又G无偶回路，则G_1必含奇回路C，我们证明$G_1=C$。因否则由上题（17）知G_1必为回路的和集，于是必存在u、$v\in C$使有(u, v)-通路P，P与C内部不相交，如图（图2.28）所示：u、v将回路C分为两通路P_1、P_2，由于C是奇路，故P_1与P_2必然其长度不同的奇偶性，不妨设$|P_1|$为奇数，$|P_2|$为偶数。若$|P|$为奇数，则由P_1和P组成的回路便为偶回路，与G_1不含偶回路矛盾。若$|P|$为偶数，则由P和P_2组成的回路为偶回路亦与G_1不含偶回路矛盾，$\therefore G=C$，故G的每一个块成为K_2或为奇回路。

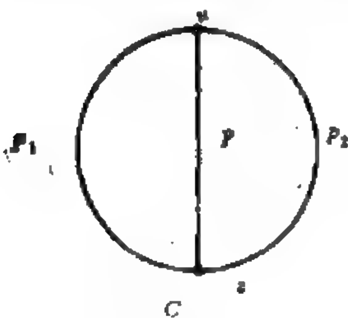


图2.28

（20）试证：不是块的连通图至少有两个块使其中每一个块恰好有一个割点。

证：不是块的连通图至少有两个块，对图的块数施归纳。若G有两个块，则显然G只有一个割点，故每一块恰好有一个割点；若对有块数少于K的图结论正确，我们证明G的块数等于K时结论亦真（$K>2$）。

设$v\in V(G)$是G的任一割点，则G可分为两部分，设为G_1、G_2，它们以v为公共点。显然G_1、G_2的块数小于K，若G_1是块显然它只有一个割点v，否则由归纳假定G_1至少有两个块恰好有一个割点。若v不是G_1的割点，此时G_1的这两个块中显然必至少有一个不含v，即G中至少有一个块只恰好含G的一个割点。同理可得G_2中至少有一个块恰好只含G的一个割点，故G恰好有两个块只含一个割点．此题得证．

（21）证明：G中块的个数等于$W+\sum\limits_{v\in V}(b(v)-1)$．

这里$b(v)$表示G中含有v的块数．

证：先设$W=1$．对G中割点的数目施以归纳．若$v\in V$不是割点，显然$b(v)=1$，即$b(v)$

$-1=0$。若G的割点数为0，即G是块。此时有$W+\sum_{v\in V}(b(v)-1)=1+0=1$，上式正确，设$G$的割点数为$K-1$时公式成立，证明$G$的割点为$K$时公式成立．$K=1$时可直接验证公式为真，不妨设$K>1$．

由上题（20）可知：G至少有块只含一个割点，设这割点为v，在G中去掉只含v这一割点的所有块，使割下的图为G_1，且v不是G_1的割点，于是G_1上有$K-1$个割点．由归纳假定，G_1的块数为$1+\sum_{v\in V(G_1)}(b(v)-1)$．显然，因$K>1$，故不属于$G_1$的$G$的块数应为$b(v)-1$．

又当$v\in V(G)$不是割点时，前面已证$b(v)-1=0$，$\therefore G$的块数为$1+\sum_{v\in V(G_1)}(b(v)-1)+(b(v)-1)=1+\sum_{v\in v(G_1)}(b(v)-1)$．

由上已证明了当$\omega=1$时，公式成立．

当$\omega>1$时，设G_1，G_2，…，G_ω是G的分支，故G的块数为：

$$\sum_{i=1}^{W}\left(\sum_{v\in v(G_i)}(b(v)-1)+1\right)=\sum_{v\in v(G)}(b(v)-1)+W.$$

（22）设G是非空图，若对任意的$e\in E$都有$K(G-e)<K(G)$，则G称为K-临界的．试证：①每个K-临界的2-连通图（即$K(G)=2$）都有一个次数为2的顶点；②若G是一个$\nu\geqslant4$的K-临界的2-连通图，则$\varepsilon\leqslant2\nu-4$．

证：①对ε施归纳．当$\varepsilon=3$时，K-临界图又是2-连通的必为K_3，显然有次数为2的顶点．设$e<K$时结果正确，证明$e=K$时结论也正确．

对$e_1\in E(G)$：i）若$G_1\cdot e_1$是一个临界的块．由归纳假定$G\cdot e_1$有次数为2的顶点v_1，而对任意的$v\in V(G\cdot e)$必有$v\in V(G)$，且$d_{G\cdot e}(v)>d_G(v)$，$\therefore d_{G\cdot e}(v_1)\geqslant d_G(v_1)$，即$d_G(v_1)\leqslant2$．又$G$是2-连通的，$\therefore d_G(v)\geqslant2$，$\therefore d_G(v_1)=2$，即$G$有次数为2的顶点

ii）若$G\cdot e_1$不是临界的．则存在$e_2\in E/\{e_1\}$．使$(G\cdot e_1)-e_2$仍是2-连通的，又$(G\cdot e_1)-e_2=(G-e_2)\cdot e_1$，因为$G$是$K$-临界的2-连通图，故$G-e_2$不是块．但$(G-e_2)\cdot e_1$是2-连通的，即为块，于是$G-e_2$的割点必为$e_1$的端点，且$e_2$与$e_1$必邻接．设$u$为$e_1$和$e_2$的公共端点，$e_1=uv$，显然$u$不能是$G-e_2$的割点，否则与$(G-e_2)\cdot e_1$是块相矛盾，即$v$是$G-e_2$的割点，于是必有$d_{G-e_2}(u)=1$，否则$(G-e_2)\cdot e_1$不是块．$\therefore d_G(u)=2$，即$G$有次数为2的顶点．

②对ν施归纳．$\nu=4$，K-临界的2-连通图为，（图2.29）恰有四条边，故$e=L\leqslant2\nu-4$．

图2.29

若顶点数$\nu>K$时，结论成立，现证$\nu=K$时结论也成立．

由①知K-临界的2-连通图有一个顶点的次数为2，不妨设$d(v)=2$．令与v关联的边分别为e_1和e_2．

i）若$G\cdot e_1$是K-临界的，由于G是块，得$G\cdot e_1$必是块．由归纳假定$\varepsilon(G\cdot e_1)\leqslant2(\nu-1)-4$．

$\therefore\quad \varepsilon(G)=\varepsilon(G\cdot e_1)+1\leqslant2(\nu-1)-4+1=2\nu-5<2\nu-4$．

ii）若$G\cdot e_1$不是临界的，必有$(G\cdot e_1)-e_2$是块．现证$G'=(G\cdot e_1)-e_2$也是K-临界的．否则必存在e_3使$G'-e_3$是块，但显然$G'=G-v$，故$G-e_3$也应该是块，这与G是K-临界的相矛盾．$\therefore G'$是K-临界的2-连通图．由归纳假定，$\varepsilon(G')\leqslant2(\nu-1)-4$，而$\varepsilon(G)=\varepsilon(G')+2$

$\leq 2\nu-4$，故$\nu=K$时结论正确.

由上得K-临界的2-连通图为$\nu\geq 4$时，有$\varepsilon\leq 2\nu-4$.

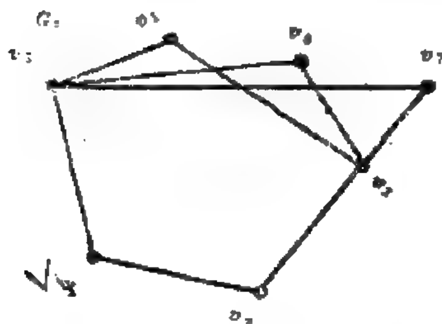


图2.30

(23) 对一切$\nu\geq 5$，找出一个直径为2的只有$\varepsilon=2\nu-5$的2-连通图G.

解：图G可按如下构造：先做一个5-回路，设其顶点分别为v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，然后将$\nu-5$个顶点分别都向v_1，v_2连边．如$\nu=7$时图为G每加一点增加2条边，故有

$$\varepsilon(G)=5+2(\nu-5)=2\nu-5.$$

显然G的直径是2，且因任意两顶点都在一个回路中，它无割点，故为2-连通的．如图2.30所示：

2．划分

(24) 证明定理：分一个偶数为p个部分的划分$\Pi=(d_1,\ d_2,\ \cdots d_p)$，$p-1\geq d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_p$，是一个图划分当且仅当经过修正后的划分

$$\Pi'=(d_2-1,\ d_3-1,\ \cdots,\ d_{d_1+1}-1,\ d_{d_1+2}-1,\ \cdots d_p)$$

也是图划分。

证：因为由一个有划分Π'的图可以由加上一个邻接于度为d_2-1，$d_3-1,\cdots d_{d_1+1}-1$的各点的新点来构成一个有划分Π的图，所以，若Π'是图划分，则Π也是图划分．

现在令G是有划分Π的一个图．若度为d_1的一个点邻接于度为d_i的各点，$i=2$到d_1+1，则移去这一点就产生一个有划Π'的图．

所以我们只要证明可以由G得到这样的一个点的一个图．我们假定在G中点v_i的度为d_i，v_1是度为d_1的一个点，并且与它邻接的各个点的度的和是最大的．若v_1不是与所有$i=2$到d_1+1的点v_i邻接，则有点v_i和v_j，$d_i>d_j$，使得v_1v_j是一条边而v_1v_i不是一条边．由于$d_i>d_j$，必有某个点v_K与v_i邻接而不与v_j邻接．移去v_1v_j和v_Kv_i，加上边v_1v_i和v_Kv_j，产生另一个图，在这个图的划分Π中，与v_1邻接的点度的和比在G中更大．重复这种过程就产生一个图，其中v_1有所需要的性质．

(25) 证明定理：令$\Pi=(d_1,\ d_2,\cdots,d_p)$是分$2q$为$p$个部分的一个划分，$d_1\geq d_2\geq\cdots d_p$，则$\Pi$是图划分的充要条件是对每个整数$r$，$1\leq r\leq p-1$，

$$\sum_{i=1}^{r}d_i\leq r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{p}\min\{r,\ d_i\}\quad .\ (*)$$

证：必要性：给定Π是$2q$的一个属于图G的划分，r个是最大的度的和可以视为两部分，第一部分由相应的这r个点互相联结的边所给予，第二部分从联结这r个点中的一点与其余$p-r$个点中的一个点的边得到．这两部分分别至多为$r(r-1)$与$\sum\limits_{i=r+1}^{p}\min\{r,\ d_i\}$.

充分性：施归纳于p．显然这个结果对于有一个部分或二个部分的序列成立．假定它对于有P个部分的序列成立，又令d_1，d_2，$\cdots$，d_{p+1}是一个满足定理的假设的序列．

令m和n是最小和最大的整数，使得

$$d_{m+1}=\cdots=d_{d_1+1}=\cdots=d_n.$$

构造一个有p个项的新序列，令

$$e_i=\begin{cases}d_{i+1}-1, & 对 i=1 到 m-1 和 n-(d_1-m)-1 到 n-1\\ d_{i+1}, & 对其余的 i.\end{cases}$$

若定理的假设对于新的序列e_1, …, e_p成立，则由归纳法假设，有一个图以各个数e_i为度. 一个有给定的度序列d_i的图可以由加上一个度为d_1的新点使它邻接于如下的一些点来构成，这些点的度相应于上面在d_{i+1}中减去1得到的那些项e_i.

显然$p>e_1\geqslant e_2\geqslant\cdots\geqslant e_p$. 假定定理中所论条件（*）不成立，又令$h$是使它成立的$r$的最小值. 则

$$\sum_{i=1}^{h}e_i>h(h-1)+\sum_{i=h+1}^{p}\min\{h,\ e_i\}. \qquad ①$$

然而下列不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{h+1}d_i\leqslant h(h+1)+\sum_{i=h+2}^{p+1}\min\{h+1,\ d_i\}, \qquad ②$$

$$\sum_{i=1}^{h-1}e_i\leqslant(h-1)(h-2)+\sum_{i=h}^{p}\min\{h-1,\ e_i\}, \qquad ③$$

$$\sum_{i=1}^{h-2}e_i\leqslant(h-2)(h-3)+\sum_{i=h-1}^{p}\min\{h-2,\ e_i\}. \qquad ④$$

用S记满足$i\leqslant h$且$e_i=d_{i+1}-1$的i的个数. 则从②减去①，从①减去③、④，得到

$$d_1+S<2h+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h+1,\ d_{i+1}\}-\min\{h,\ e_i\}) \qquad ⑤$$

$$e_h>2(h-1)-\min\{h-1,\ e_h\}+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h,\ e_i\}-\min\{h-1,\ e_i\}), \qquad ⑥$$

$$e_{h-1}+e_h>4h-6-\min\{h-2,\ e_{h-1}\}-\min\{h-2,\ e_h\}$$
$$+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h,\ e_i\}-\min\{h-2,\ e_i\}). \qquad ⑦$$

注意$e_h\geqslant h$，因为否则不等式⑥就给出一个矛盾. 令a、b、c分别记满足$i>h$而$e_i>h$、$e_i=h$和$e_i<h$的i的个数. 此外，令a'、b'、c'记这些i中还满足$e_i=d_{i+1}-1$的个数.

则 $$d_1=S+a'+b'+c'. \qquad ⑧$$

不等式⑤—⑦现在成为

$$d_1+S<2h+a+b'+c', \qquad ⑨$$

$$e_h\geqslant h+a+b, \qquad ⑩$$

$$e_{h-1}+e_h\geqslant 2h-1+\sum_{i=h+1}^{p}(\min\{h,\ e_i\}-\min\{h-2,\ e_i\}). \qquad ⑪$$

现在分下列几种考察：

i) $c'=0$. 因$d_1\geqslant e_h$，我们由⑩得

$$h+a+b\leqslant d_1.$$

但结合⑧、⑨得

$$2d_1 < 2h + a + a' + 2b',$$

引出矛盾.

ii) $c' > 0$，又$d_{h+1} > h$. 即当$d_{i+1} > h$时$d_{i+1} = e_i + 1$. 故由$d_{h+1} > h$得 $S = h$和$a = a'$. 但不等式⑧与⑨结合蕴含

$$d_1 + h < 2h + a' + b' + c' = d_1 + h$$

引出矛盾.

iii) $c' > 1$和$d_{h+1} = h$. 在此情形下$e_h = h$. 由⑩，$a = b = 0$；由⑧，$d_1 = S + C'$,而且，因为$e_h = d_{h+1}$，至少有c'个i，$i > h$，使$e_i = h - 1$. 从而不等式⑪蕴含

$$e_{h-1} \geqslant h - 1 + c' > h,$$

故$e_{h-1} = d_h - 1$，从而不等式⑪蕴含

$$e_{h-1} \leqslant h - 1 + c' > h$$

故$e_{h-1} = d_h - 1$. 从而$S = h - 1$和由⑧

$$d_1 = h - 1 + c' \leqslant e_{h-1} < d_h,$$

引出矛盾.

iv) $c' = 1$和$d_{h+1} = h$. 此时仍$e_h = h$，$a = b = 0$和$d_1 = S + c'$.因为$S \leqslant h - 1$，就有 $d_1 = h$. 但这蕴含$S = 0$，所以$d_1 = 1$，即所有的$d_i = 1$，于是（*）就显然满足. 引出矛盾.

因为$e_h \geqslant h$和$d_{h+1} \geqslant e_h$，可见d_{h+1}不能小于h. 于是所有可能情形都讨论过了，证毕.

3. 覆盖

（26）证明定理：已给简单图$G =$（X，E），其阶为n，又设M_0是一极大并列集，C_0是一小覆盖集，则$|M_0| + |C_0| = n$.

证：已给极大并列集M_0，在每一个非饱和点上，增加一边，过此点将得覆盖C_1，显见

$$C_1 = M_0 \cup \{e_y / y \notin V(M_0)\}$$

由此，乃有

$$|C_1| = |M_0| + (n - 2|M_0|) = n - |M_0|$$

或
$$|C_1| + |M_0| = n.$$

反之，设已给极小覆盖集C_0，保留其若干边，然后连续将和保留的边相邻的边去掉，得并列集M_1、由于在C_0中不可能有长为 3 的链，每舍去一边，恰好产生一个M_1的非饱和点.故

$$|C_0| - |M_1| = |X| - 2|M_1| = n - 2|M_1|,$$

或
$$|C_0| + |M_1| = n.$$

由于M_0的极大与C_0的极小，亦即

$$|c^0| \leqslant |C_1|, \quad |M_1| \leqslant |M_0|,$$

故从
$$|c_0| + |M_1| = |C_1| + |M_0|,$$

可得
$$|c_0| = |C_1|, \quad |M_1| = |M_0|,$$

亦即$|C_1|$是极小的，M_1是极大的，同时也就有

$$|c_0| + |M_0| = n$$

（27）证明定理：已给两分图$G =$（X，Y；E），顶点集X可以在顶点集Y上的配对的充要条件是

$$|\Gamma_G(A)| \geqslant |A| \qquad (A \subset X)$$

证：应用极大并列集的概念．设X可以在Y上配对，则图G上极大并列集的维是

$$|M_0| = |X|,$$

而极小径集的维是

$$\min(|X-A|+\Gamma_G(A)), \qquad (A\subset X)$$

根据König定理，应有

$$|X| = \max_M |M| = \min(|X-A| + |\Gamma_G(A)|$$

$$= |X| + \min_{A\subset X}(|\Gamma_G(A)| - |A|).$$

上式成立的充要条件是

$$\min(|\Gamma_G(A)|-|A|)=0,$$

亦即　　$|\Gamma_G(A)|\geqslant|A|$　　对一切$A\subset X$均成立。

（28）舞会问题．这是一个古典问题．设在一个学校里，每个男生认识K个女生，每个女生认识K个男生，问在一次舞会上，是否可使相认的男女共同起舞？

解：将男生作为点集X，女生作为点集Y，相识的男女之间联线，作出两分图$G=(X, Y; E)$．显见$\Gamma_G(x)=K=\Gamma_G(y)$，其中$x\in X$，$y\in Y$，在$X$中任取子集$S\subset X$．$S$个男生共认识$K\cdot|S|$个女生，但每个女生，最多只认识$K$个男生，故$|\Gamma_G(S)|$至少是$|S|$．亦即条件$\Gamma_G(S)\geqslant|S|$恒能成立．据上题（27），相识的男女生共同起舞是可能的．

（29）证明Turan定理：任给一个图集

$$\mathscr{H}=\{G=(X, E)/|X|=n,\ \beta_0(G)\leqslant K\}$$

其阶数为n，稳固数$\leqslant K$，则其中边数可能最少的图，同构于$G_{n,K}$.

证：将n写成$n=K\cdot q+r$ $(0\leqslant r<K)$形式：

$$\begin{cases} K+1 & 2K+1 & 3K+1 & qK+1 & \cdots \\ K+2 & 2K+2 & 3K+2 & qK+2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 2K & 3K & 4K & (q+1)K & \cdots \end{cases}$$

对n施归纳．设对第q列以前的各列的n、K，定理均成立，现证对于第q列亦然。

首先验证对于第一列的n、K定理能成立．例如$n=9$，$K=6$，便有$9=6+3$.

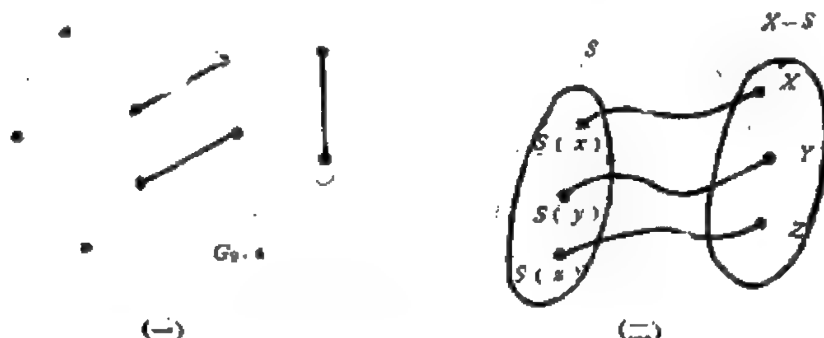


图2.31

在图G中，先任取六点，构成稳固集S，$X-S$含三点，命为x、y、z，这三点到S都应有边相联，否则稳固集便可加大．设x、y、z与S中相联的点分别为$S(x)$、$S(y)$、$S(z)$．由于x、y、z各不相同，$s(x)$、$s(y)$、$s(z)$也应各不相同．否则若有$S(x)=S(y)$，在S上舍

去$S(x)=S(y)$，补进x、y，稳固集S便将加大。在G中作尽可能少的边，可以假定x与y原不相邻，由以上讨论，可见上面图（图2.31）（一）与（二）是同构的。

其次，在图集

$$\mathscr{X}=\{G/N(G)=n,\ \beta_0(G)\leqslant k\}$$

中，设有图$\bar{G}\in\mathscr{X}$，其$\beta_0(\bar{G})=\bar{K}<K$。在图$\bar{G}$中，任取稳固集$\bar{S}$，$|\bar{S}|=\bar{K}<K$。在$Z(\bar{G})-\bar{S}$中任取一点$x$，$x$到$\bar{S}$将有联边，去掉这条联边，将点$x$加到$\bar{S}$里去，图$\bar{G}$的边数便将减少，而其稳固数便加大，故若在$\mathscr{X}$里取边数尽可能少的图$G$，便可假定其稳固数等于$K$。在$G$中取稳固集$S$，则$|S|=K$。由上所述，可知任一点$x\in X-S$必与$S$相邻。作子图$G_{X-S}$，其阶$|X-S|=n-K<n$，其稳固数$\leqslant K$，故由归纳假设，有

①$M(G_{X-S})\geqslant M(G_{n-K,K})$

但$G_{n,K}$的构成，可在$G_{n-K,K}$的K个互质的集团中各加进一点得来。但在每个集团中，各加进一点，其边的总数，将增加$n-K$。故$M(G_{n,K})-M(G_{n-K,K})=n-K$，设$G\in\mathscr{X},\beta_0(G)=K$，则由于$G$的边数，尽可能地少，遂有

②$M(G)\leqslant M(G_{n,K})$，

故

$$\begin{aligned}n-K=|X-S|&\leqslant M_G(X-S,\ S)=M(G)-M(G_{X-S})\\&\leqslant M(G_{n,K})-M(G_{n-K,K})=n-K\ ,\end{aligned}$$

由于在这个不等式中，两端都是$n-K$，故有

$$M(G)-M(G_{X-S})=M(G_{n,K})-M(G_{n-K,K})$$

由①和②，便有

$$M(G_{X-S})=M(G_{n-K,K}),$$

及

$$M(G)=M(G_{n,K}).$$

由上述证明可知：图G是由K个互质且互不相邻的集团c_1、c_2、…、c_K及一个K顶的稳固集S所构成，且

$$|X-S|=M_G(X-S,\ S)=n-K,$$

由此可知，自每一顶点$x\in X-S$仅有一条边联到S。如上，令$S(x)$为顶x在S中的邻点，若$x\in C_i$，$y\in C_j$（$i\neq j$），则

$$S(x)\neq S(y);$$

否则若$S(x)=S(y)$，在S中去掉此点，补上x、y二点，因x与y属于G的不同的集团，x与y应不相邻，G的稳固数将加大，这是不可能的。

若x、y属于同一集团，$x\in C_i$、$y\in C_i$，则必有$S(x)=S(y)$；否则在C_i之外各个集团各取一点，其在S中的邻点应各不同，且也不同于$S(x)$与$S(y)$，于是S里将含有$K+1$个不同的点，这也不可能。

故知图具有下列性质：

i）阶$=n$，并具有可能最少的边数；

ii）其n个顶点，分成K个集团C_1、C_2、…、C_K及一个K维的稳固集S；

iii）在同一集团C_i中的点，其在S中的邻点均相同。每个集团C_i，唯一对应于一点x_i，将此点加进C_i也成一个集团。故G的稳固集S，实际是从所分解的每个集团中各取一点所构成，因而图G同构于$G_{n,K}$。

4．因子分解

（30）①证明：每个K-方体（$K\geq 2$）都有一个完美对集（即1-因子）；

②求K_{2n}和K_{nn}中不同的完美对集的数目。

证：①以$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_K)$表示$K$-方体的一个顶点，其中$\varepsilon_i=\begin{cases}0\\1\end{cases}$，对每一$v=(0, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_K)$对应于唯一的$v'=(1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_K)$，反之亦然。由$K$-方体的构造知$(v, v')$为$K$-方体的一条边，$K$-方体中所有顶点$v$和$v'$建立了一一对应关系，故有形如$(v, v')$的边即构成$K$-方体的一个完美对集。

②K_{2n}的完美对集数：在K_{2n}中固定2个点及与其关联的边，则得$K_{2(n-1)}$，在固定的二点中，令其一不变，另一取遍$2n-1$个点，则得$2n-1$个不同的$K_{2(n-1)}$。令K_{2n}的完美对集数为$|K_{2n}|$，则

$$\begin{aligned}
|K_{2n}| &= (2n-1)|K_{2(n-1)}| \\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot|K_{2(n-2)}| \\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot|K_{2(n-3)}| = \cdots \\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3|K_2| \\
&= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{2(n-1)\cdot(2n-4)\cdot(2n-6)\cdots 2} \\
&= \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\cdot(n-1)!} = \frac{(2n)!}{2^{n-1}(n-1)!\,2n} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}
\end{aligned}$$

K_{nn}的完美对集数：K_{22}显然有一个完美对集．任意固定K_{nn}的一条边，则对应的固定了一对点u、v和所有与这对点相连的边，剩余的点和边生成一个$K_{(n-1),(n-1)}$的二分图．固定u，令v取遍所有可能的取法，则一共有n种不同取法，设K_{nn}的不同完美对集的数目为$|K_{nn}|$，则有

$$\begin{aligned}
|K_{nn}| &= n\cdot|K_{(n-1)(n-1)}| \\
&= n(n-1)|K_{(n-2)(n-2)}| \\
&= n(n-1)(n-2)|K_{(n-3)(n-3)}| \\
&= \cdots\cdots \\
&= n(n-1)\cdots 3\cdot|K_{22}| \\
&= n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!
\end{aligned}$$

即K_{nn}有$n!$个对集．

（31）对每个$K>1$，找出一个没有完美对集的K-正则简单图的例子．

解：当K为偶数时，$K=2n$，则K_{2n+1}即可．

当$K=2n+1$时，特别当$n=1$时，如图（图2.32）由此，对一般地$K=2n+1$有：先画一点u，取v_1、v_2、…、v_{2n+1}与u相连．对于v_i取$2n+2$个点的完全图，任取n条边的一对集，将这些边去掉并将被这n条边饱和

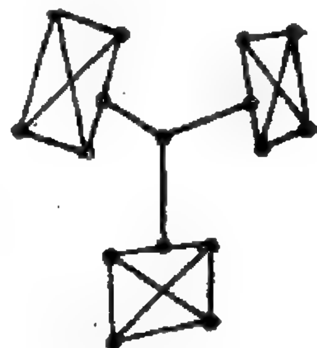


图2.32

的$2n$个顶点都与v_i相连（$i=1, 2, \cdots, 2n+1$）。于是就得到一个（$2n+1$）正则图G，G有（$2n+1$）块同构子图，且以点u为中心，u为割点，当$n=2$时，如图（图2.33）：

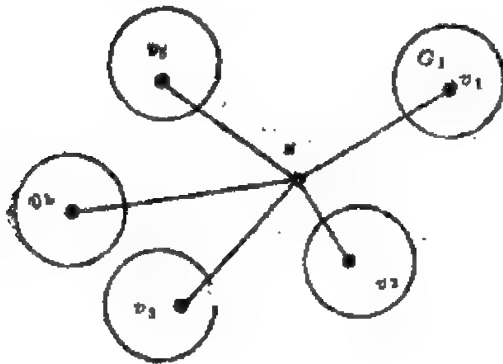


图2.33

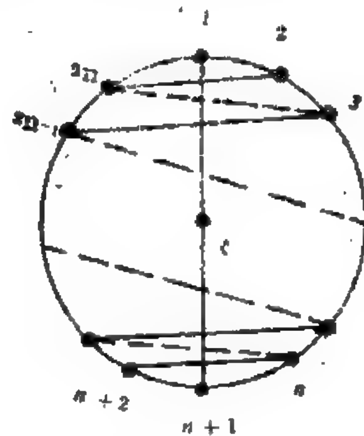


图2.34

若G有完美对集M，则必有一边（u，v_i）$\in M$，于是（u，v_j）$\notin M$（$j\neq i$）。因此，不妨设（u，v_1）$\in M$，于是G的完美对集在G_1中的应也是G_1的完美对集，但G_1无完美对集，矛盾。

（32）证明：K_{2n+1}可以表示为n个连通的2-因子的和集（$n\geqslant 1$）。

证：设K_{2n+1}的顶点编号为0，1，2，…，$2n$，现将0放在圆心，而其余$2n$个顶点均匀地放在圆周上（如图2.34）：

令$c_1=0\ 1\ 2\ (2n)\ 3\ (2n-1)\cdots n\ (n+2)\ (n+1)\ 0$，则$c_1$是$K_{2n+1}$的一个2-因子。若将$c_1$以$O$为心按顺时针方向旋转，一个顶点便得到$K_{2n+1}$的一个新2-因子$c_2$，于是旋转$n-1$次后共得到$n$个2-因子$c_1$，$c_2$，…，$c_n$。显然$c_i$之间两两边不相交，且$G=c_1\cup c_2\cup\cdots\cup c_n$。

（33）设H是一个有限群，K是H的子群。证明：存在元素h_1，h_2，…$h_n\in H$，使h_1K，h_2K，…，h_nK是K的左陪集，且Kh_1，Kh_2，…Kh_n是K的右陪集。

证：由近世代数知识知，H 可 分 解 左 陪 集，$H=a_1K\cup a_2K\cup a_nK=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$（$A_i=a_iK$）且任意两个左陪集或者重合，或者无公共元素。同时$H$又可分解为右陪集

$$H=Kb_1\cup Kb_2\cup\cdots\cup Kb_n$$
$$=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n\ (B_i=Kb_i)\ .$$

现以A_1，…，A_n，B_1，…B_n为顶点集，构造二分图G，$(A_i, B_j)\in E(G)\Longleftrightarrow A_i\cap B_j\neq 0$，任取顶点集$\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots A_{i_m}\}=S$，则$|N(S)|\geqslant|S|$。∵若$|N(S)|<|S|$，则有

$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_m}\subset B_{j_1}\cup\cdots\cup B_{j|N(S)|}$

（这里B_{jk}是与A_{ik}相连的点）且包含是严格的。但应有

$$A_{i1}\cup\cdots\cup A_{im}=B_{j1}\cup\cdots\cup B_{j|N(S)|}\ .$$

∵$|A_i|=|B_j|$，引出矛盾，∴$|N(S)|\geqslant|S|$。

即有完美对集（$A_{i1}B_{j1}$），…，（A_{in}，B_{jn}）。取$h_1\in A_{i1}\cap B_{j1}$，$h_2\in A_{i2}\cap B_{j2}$，…，$h_n\in A_{in}\cap B_{jn}$，则有

$$H=h_1K\cup h_2K\cup\cdots\cup h_nK$$
$$=Kh_1\cup Kh_2\cup\cdots\cup Kh_n.$$

（34）证明：若G是一个（$K-1$）-边连通的K-正则图，且ν为偶数，则G 有 完 美 对

集.

证：设S是V的一真子集，用G_1，G_2，…，G_n表示$G-S$的奇数分支，并设m_i是一个端点在G_i中，另一端点在S中的那些边的数目．由于G是K-正则的，故$\sum_{v\in V(G_i)} d_G(v)=K\nu(G_i)$；由$G$是$(K-1)$-边连通，$m_i=\sum_{v\in V(G_i)} d_G(v)-2\varepsilon(G_i)=K\nu(G_i)-2\varepsilon(G_i)\geqslant K-1$．当$K$奇数时，$K\nu(G_i)$为奇数，故$m_i$为奇数，但$K-1$为偶数，$\therefore m_i\geqslant K$；当$K$为偶数时，$m_i$为偶数，但$(K-1)$为奇数，故$m_i\geqslant K$，即恒有$m_i\geqslant K$．于是$O(G-S)=n\leqslant\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{n} m_i$，而$\sum_{i=1}^{n} m_i$表示所有$G_i$中与$S$中点关联的边数，$\therefore \sum_{i=1}^{n} m_i\leqslant K|S|$，于是$O(G-S)\leqslant|S|$．由定理可知，$G$有完美对集．

5．可着色性

（35）找出一个合理的边着色来证明$\chi'(K_{m,n})=\Delta$.

证：设$K_{m,n}$具有二分划(x,y)，其中

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

不妨令$n\geqslant m$．若对边x_iy_j着色$i+j\pmod n$，则对任二相邻边x_iy_K和x_iy_l分别着色计K和$i+l\pmod n$．

显然当$K\neq l$时，$i+K\neq i+l\pmod n$．

同理，对任二相邻边x_Sy_j和x_ty_j也着有不同颜色．于是，所给的边着色是正常的

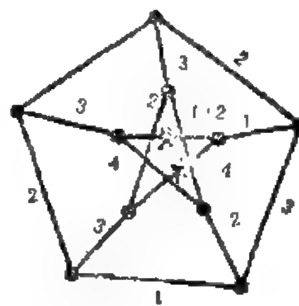
又$\because \Delta=n$，$\therefore$所给的边着色是正常的Δ-边着色，即$\chi'(K_{m,n})\leqslant\Delta$，而显然$\chi'(K_{m,n})\geqslant\Delta$，故$\chi'(K_{m,n})=\Delta$.

（36）试证：Petersen图是4-边着色的。

证：显然Petersen图存在正常4-边着色。

若能证明Petersen图不存在正常3-边着色，则结论得证。

事实上，由图对称性可先对最外面的五条边作个分划，从而决定与它们相邻的五条边的颜色（如图2.35中所标示）．但由此可得两条相邻的边（图中画“×”号者），必着有相同的颜色，故Petersen图不具有正常3-边着色．



(Petersen 图)

图2.35

（37）构造二分图G的正常Δ-边着色的一个可行算法。

解：①置$\bar{G}=G$，$\bar{\Delta}=\Delta$；

②求$\bar{G}$的最大对集$\bar{M}$，使得$\bar{M}$饱和所有次最大的顶点；令$E\bar{\Delta}=\bar{M}$，$\bar{\Delta}=\bar{\Delta}-1$．若$\bar{\Delta}=0$，则停止；否则，置$\bar{G}=\bar{G}-\bar{M}$，转向②.

（38）试证：若G是二分图，且$\delta>0$，则G有一个δ-边着色，使所有δ种颜色都出现在每一个顶点上。

证：设l是G的一个最优δ-边着色．假设$\exists_u\in V(G)$，使得i_0不在u上出现，于是必有i_1在

u上至少出现二次，从而$G(E_{i_1} \cup E_{i_2})$ 含u的分支是一奇回路，这与G是二分图不含奇回路矛盾。

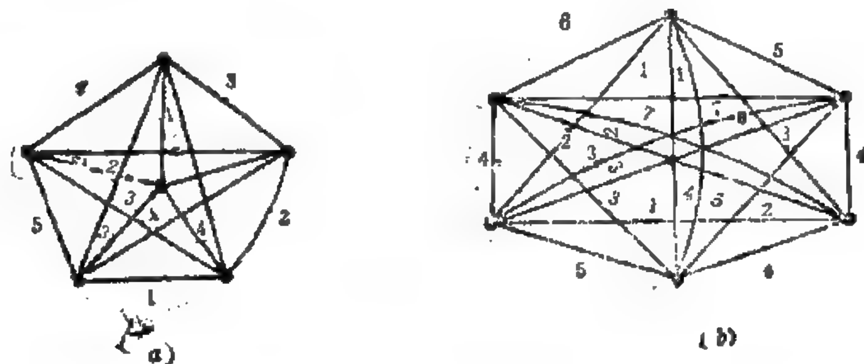
(39) 用找出适当的边-着色的方法证明

$$\chi'(K_{2n}) = \chi'(K_{2n-1}) = 2n-1.$$

证：①先证$\chi'(K_{2n}) = 2n-1$。将K_{2n}的各顶点安排成以一个顶点为中心的正(2n-1)-角形的形式，它的每条径向边和垂直于它的各边组成K_{2n}的一个完美对集（见图2.36(a)）。而这图恰有$2n-1$条径向边，故它恰有$2n-1$个不同的对集；于是这$2n-1$不同对集着与不同颜色，则得到K_{2n}的一个正常$(2n-1)$-边着色，即$\chi' \leq 2n-1$。又因$\chi' \geq \Delta = 2n-1$，所以$\chi' = 2n-1$。

②再证明$\chi'(K_{2n-1}) = 2n-1$。将K_{2n-1}的各顶点排成一个顶点为中心的正$(2n-2)$—角形的形式，它有一半的径向边中的每条和垂直于它的各边组成K_{2n-1}的最大对集。另外，图中每对中心对称的顶点间的连接它的另一半径向边中，每条和平行于它的各边也組成K_{2n-1}的一个最大对集 .（见图2.36(b)）。于是这图共有$\frac{1}{2}(2n-2)+\frac{1}{2}(2n-2)+1 = 2n-1$个不同的对集。若给它们着有不同颜色，便得到$K_{2n-1}$的一个正常$(2n-1)$-边着色，即$\chi' \leq 2n-1$。又因上述$2n-1$个不同的对集的每一个之边数为$n-1$，即每一对集不能再增加了，故$K_{2n-1}$不存在小于$2n-1$的正常边着色，故

$$\chi' = 2n-1.$$



(a) (b)

图2.36

(40) ①G是一个简单图，试证：若$\nu = 2n+1$且$\varepsilon > n\Delta$，则$\chi' = \Delta + 1$；

②利用①证明：

i) 若G是在有偶数个顶点的简单正则图中剖分一条边而得到的一个图，则$\chi' = \Delta + 1$；

ii) 若G是在有奇数个顶点的简单K-正则图中删去少于$K/2$条边而得到的一个图，则$\chi' = \sigma + 1$。

证：①G是简单图，由定理知，$\chi' = \Delta$或$\chi' = \Delta + 1$。

假设$\chi' = \Delta$，则$E(G)$可划分为Δ个对集$E_1, E_2, \cdots, E_\Delta$，又$\because \nu = 2n+1$

$\therefore |E_i| \leq n$，$(i = 1, 2, \cdots, \Delta)$。

于是，$\varepsilon = \sum_{i=1}^{\Delta} |E_i| \leq n\Delta$，这与$\varepsilon > n\Delta$矛盾 。

②i) 显然有$\nu=2n+1$,

$$\varepsilon=\frac{2n\Delta}{2}+1=n\Delta+1=>n\Delta,$$

由①得$\chi'=\Delta+1$.

ii) 显然有$\nu=2n+1$,

$$\varepsilon>\frac{(2n+1)\Delta}{2}-\frac{\Delta}{2}=n\Delta$$

由①得$\chi'=\Delta+1$.

(41) 试证：①$\chi'(G\times K_2)=\Delta(G\times K_2)$；

②若H是非平凡的且$\chi'(H)=\Delta(H)$，则$\chi'(G\times H)=\Delta(G\times H)$ 。

证：①$G\times K_2$相当于二个与G同构的图G_1、G_2，在对应点上相连而得到的图。

当$\chi'(G)=\Delta(G)$时，可在相连的边上均着一这新颜色，于是便得到$G\times K_2$的一个正常$\chi'(G)+1$-边着色，即

$$\chi'(G\times K_2)\leqslant\chi'(G)+1=\Delta(G)+1=\Delta(G\times K_2)$$

又∵ $\chi'(G\times K_2)\geqslant\Delta(G\times K_2)$

∴ $\chi'(G\times K_2)=\Delta(G\times K_2)$.

当$\chi'(G)=\Delta(G)+1$时，则在G_1、G_2的每对对应点都至少有同一种颜色未出现。于是可给这样的对应点间的边着上在两端点未出现的颜色，从而得到$G\times K_2$的一个正常$\chi'(G)$-边着色，即

$$\chi'(G\times K_2)\leqslant\chi'(G)=\Delta(G)+1=\Delta(G\times K_2),$$

又∵ $\chi'(G\times K_2)\geqslant\Delta(G\times K_2)$,

∴ $\chi'(G\times K_2)=\Delta(G\times K_2)$.

②$G\times H$相当于先作$\nu(H)$个与G同构的图G_1、G_2、…、$G_{\nu(H)}$，然后在每组对应点上都作一个与H同构的图．显然每个G_i都存在一个正常的$\Delta(G)+1$-边着色，且在每组对应点上都至少有同一种颜色未出现．

又因$\chi'(H)=\Delta(H)$，故只要增加$\Delta(H)-1$种新颜色，便可得到$G\times H$的一个正常-边着色．于是

$$\chi'(G\times H)\leqslant\Delta(G)+1+\Delta(H)-1=\Delta(G)+\Delta(H)=\Delta(G\times H)\ ,$$

又因$\chi'(G\times H)\geqslant\Delta(G\times H)$，故有

$$\chi'(G\times H)=\Delta(G\times H)\ .$$

(42) 证明：若G是简单的，且$\delta>1$，则G有一个（$\delta-1$）-边着色，使得全部$\delta-1$种颜色都出现在每个顶点上．

证：用反证法．假设存在一个顶点v_1，使得$\delta-1$种颜色中至少有一种不在其上出现．并设$f=(E_1, E_2, \cdots, E_{\delta-1})$是$G$的最优（$\delta-1$）-边着色．则有

$$C(v_1)<\delta-1<\delta\leqslant d(v_1),$$

于是存在i_0、i_1，使得i_0不出现在v_1上，而i_1至少两次出现在v_1上．

设v_1、v_2着有颜色i_1，且i_1在v_2上仅出现一次，而i_0在v_2上必定出现(否则，用i_0给v_1、v_2着色，使得到f的一个改进，与f最优相矛盾)。

因为$d(v_2)>\delta-1$，所以存在i_2在v_2上至少出现两次（设v_2v_3着有颜色i_2，且i_2在v_3上仅出现一次，否则用i_1给v_2v_3着色，用i_2给v_1v_2着色，使得到f的一个改进，这与f最优相矛盾），

前i₂在v_3上必定出现。同理，存在i_3在v_3上至少出现两次，且i_3在v_4上仅出现一次，i_3在v_4上必定出现……。

继续这个过程，直到第一次出现重复前面的着色为止。即出现$v_l v_{l-1}$着颜色i_l，使得$i_l = i_K (K < l)$为止。(如图2.32)

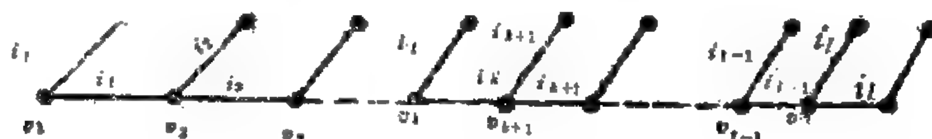


图2.37

(这种情形必定出现，否则不同颜色的数目将要多于δ种，这与仅有$\delta-1$种颜色相矛盾)。

对G重新着色，即对$1 \leqslant j \leqslant K$，用$i_{j-1}$给$v_j v_{j+1}$着色，其余不动，则得到一个新的最优$(\delta-1)$-边着色：

$$\mathscr{C}' = (E_1', E_2', \cdots, E_{\delta-1}') \qquad \text{(如图2.38)}$$

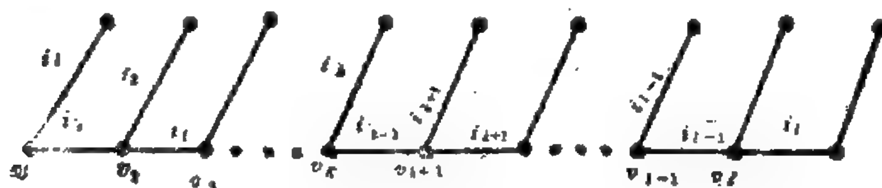


图2.38

对于新的边着色$\mathscr{C}'$来讲，在v_{K+1}上i_K不出现，而i_{K+1}至少出现两次，故$G[E'_{i_K} \cup E'_{i_{K+1}}]$通过$v_{K+1}$的分支$H'$是一条奇回路（如图2.39）。
交换$E(H') \setminus v_{K+1}v_{K+2}$中的两种颜色（如图2.40），其余均不动，则又得到一个新的最优

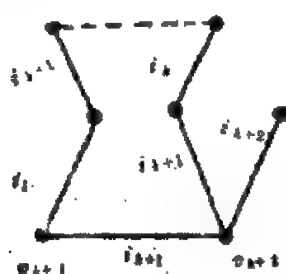


图2.39

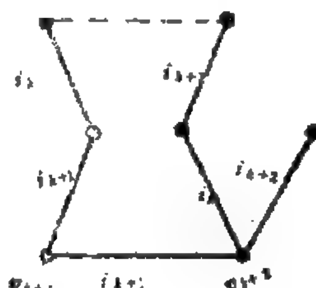


图2.40

$(\delta-1)$-边着色$\mathscr{C}'' = (E_1'', E_2'', \cdots, E_{\delta-1}'')$，使得在$v_{K+2}$上$i_K$不出现，而$i_{K+2}$至少出现两次。连续使用上述的方法，可以得到一个最优$(\delta-1)$-边着色，使得在v_{l-1}上i_K不出现，而i_{l-1}至少出现两次，然后用i_K给$v_{l-1}v_l$着色，其余不动，便得到一个最优$(\delta-1)$-边着色$\mathscr{C}^* = (E_1^*, E_2^*, \cdots, E_{\delta-1}^*)$（如图2.41）。

对于$\mathscr{C}^*$而论，在v_l上i_{l-1}不出现，而$i_l = i_K$至少出现三次，这与$G[E^*_{i_{l-1}} \cup E^*_{i_l}]$含$v_l$的分支

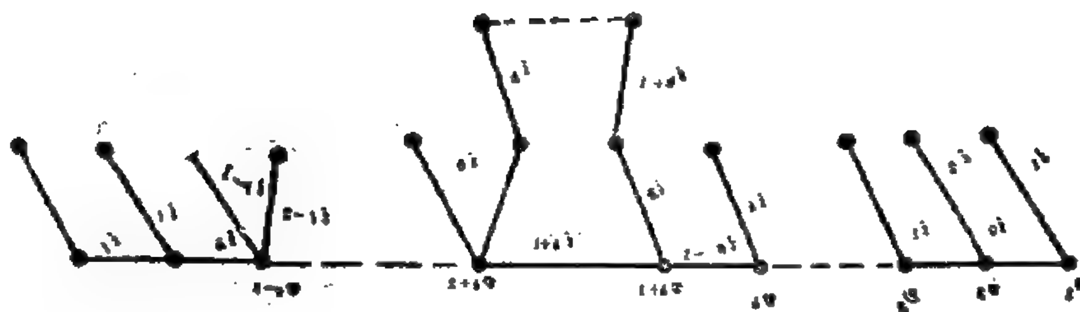


图2.41

是一条奇回路相矛盾。

综上所有情形，证明了结论。

（43）试证：若G是简单图，则$\chi \geq \nu^2/(\nu^2-2\varepsilon)$。

证：设G的一个正常K-着色分划为$(V_1, V_2, \cdots, V_K)$，由于在G^c中V_i的点构成G^c的一个团，

故 $$\varepsilon \leq \binom{\nu}{2} - \binom{|V_1|}{2} - \binom{|V_2|}{2} - \cdots - \binom{|V_K|}{2}.$$

考察 $\binom{|V_1|}{2} + \binom{|V_2|}{2} + \cdots + \binom{|V_K|}{2}$ 的极小值，可得当$\max\limits_{1\leq i\leq k}|V_i| - \min\limits_{1\leq j\leq k}|V_j| \leq 1$时达极小值，且总成立

$$\binom{|V_1|}{2} + \binom{|V_2|}{2} + \cdots + \binom{|V_K|}{2} \geq K\binom{\frac{|V|}{K}}{2}.$$

故 $$\varepsilon \leq \binom{\nu}{2} - K\binom{\frac{\nu}{K}}{2} = \frac{1}{2}\left[\nu(\nu-1) - \frac{\nu^2-\nu K}{K}\right]$$

$$= \frac{\nu^2(K-1)}{2K}$$

即 $K \geq \frac{\nu^2}{\nu^2-2\varepsilon}$，故得

$$\chi \geq \frac{\nu^2}{\nu^2-2\varepsilon}.$$

（44）试证：若K的任意两个奇回路具有一个公共顶点，则$\chi \leq 5$。

证：用反证法。若$\chi \geq 6$，设H是G的一个K-临界图（$K \geq 6$），则

$$v(H) = v_1, v_2, \cdots, v_K$$

是H的一个K-着色。取$G(v_1 \cup v_2 \cup v_3)$，则其中必含一个奇回路，否则可使其为2-着色的；同理，$G(v_4 \cup v_5 \cup v_6)$中也必有奇回路．这两个奇回路显然不相交，这与题设相矛盾．

（45）证明：若G具有$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_\nu$的次数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$，则$\chi \leq \max\min\{d_{i+1}, i\}$。

证：施归纳于ν，当$\nu=1$时，显然成立。设上式在$\nu<n$时成立，则当$\nu=n$时：

i）若$\delta<\nu-1$，则有顶点u满足$d(u)=\delta<\nu-1$。先在$n-1$个顶点数…正常的$\max\min\{d'_{i+1}, i\}$种色，（d'_i为$G-u$中的次数序列）。由于

$$d_n < \min\{d_{i-1}+1,\ n-1\} = K',$$

故与 u 相邻的点中至多有 $K'-1$ 种色；于是可在 K' 种色中取一种着在 v_n 上面仍为一正常着色．故

$$\chi(G) \leqslant \max\{\min\{d_{i-1}+1,\ n-1\},\ \max\min\{d_{i+1},\ i\}\}$$
$$\leqslant \max\min\{d_{i+1},\ i\} \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

ii）若 $\delta = n-1$，则

$$\max\min\{d_{i+1},\ i\} = n \quad \text{且}$$
$$\chi(G) = n.$$

（46）利用上题的结果，证明：

①$\chi \leqslant \{(2\varepsilon)^{1/2}\}$；

②$\chi(G) + \chi(G^c) \leqslant \nu + 1$.

证：①若 $\max\min\{d_{i+1},\ i\} = \min\{d_{K+1},\ K\} = N$，

i）$N = K \leqslant d_K + 1$，$d_K \geqslant K-1$，

$$2\varepsilon = \sum d_i \geqslant \sum_i^k d_i \geqslant (K-1)K,$$

$$\therefore \qquad \{(2\varepsilon)^{1/2}\} \geqslant \{[K(K-1)]^{1/2}\} = K = N.$$

ii）若 $N = d_K + 1 < K$，又 $d_{K-1}+1 \geqslant K-1$（总存在这样的 K，使得

$\min\{d_K+1,\ K\} = d_K + 1$ 时，要有

$\min\{d_K+1,\ K\} \geqslant \min\{d_{K-1}+1,\ K-1\}$，

只能是 $\min\{d_{K-1}+1,\ K-1\} = K-1$），可得

$$d_K + 1 = K - 1,$$

$$\therefore \qquad 2\varepsilon \geqslant \sum_i^k d_i \geqslant K(K-2),$$

$$\{(2\varepsilon)^{1/2}\} \geqslant \{[K(K-2)]^{1/2}\} = K-1 = N.$$

于上题（45）可得

$$\chi \leqslant N \leqslant \{(2\varepsilon)^{1/2}\}.$$

②当 $\chi(G) \leqslant \max\min\{d_i+1,\ i\}$

$$= \min\{d_K+1,\ K\} = N,$$
$$\chi(G^c) \leqslant \max\min\{d_i'+1,\ i\}$$
$$= \max\min\{\nu - d_{\nu-i+1},\ i\}$$

（d_i' 为 G^c 在相同意义下的次数序列）．

由①有 $\qquad d_K \geqslant N-1$，$K \geqslant N$．

令 $\nu - i + 1 = K$，由以上序列之性质得

$$\chi(G^c) \leqslant \max\{\nu - d_K,\ \nu - K + 1\}$$
$$\leqslant \max\{\nu - N + 1,\ \nu - N + 1\}$$
$$= \nu - N + 1.$$

故 $\qquad \chi(G) + \chi(G^c) \leqslant \nu + 1.$

（47）若 K-色图 G 有一个着色，它的每种颜色都至少分配给两个顶点，试证：G 有一个

这种类型的K-着色.

证：设$(V_1', V_2', \cdots, V_{K'}')$是$G$的一个$K'$着色.

$$|V_i'|\geqslant 2, \qquad K'\geqslant K.$$

设$(V_1, V_2, \cdots, V_K)$是一个尽量使每部分点数平均的K-着色.

若有$|V_i|\geqslant 2$，则即满足要求；若至少有一部分，不妨设V_1仅包含一个点v_1，则可进行下列调整：

设v_1在K'-着色中属于V_1'，则V_1'中另有一点v_2在K-着色中属于V_2，故V_2中至少还有一点v_3（否则令$V_1\cup V_2=\overline{V}_1$，则完成$(K-1)$-着色，矛盾）属于$V_2'$（若$V_2$中点都属于$V_1'$，则合并$V_1$、$V_2$成为$(K-1)$-着色，矛盾）.

V_2'又有v_4属于V_3，$\cdots$，V_{K-1}，有$v_{2(K-1)-1}\in V_{K-1}'$，V_{K-1}'又有$v_{2(K-1)}\in V_K$.

由于$|V_1|=1$，所以总存在$|V_i|\geqslant 3$ $(2\leqslant i\leqslant K)$，并且$V_{i-1}'$中有$v_{2(i-1)}\in V_i$，可做如下的着色分划：

$$(V_1\cup\{v_2\},\ (V_2-v_2)\cup\{v_3\},\ \cdots,\ (V_i-v_{2(i-1)}),\ V_{i+1},\ \cdots,\ V_K).$$

重复上述的调整过程，便可得到所要求的K-着色.

(48) 证明：K-临界图的顶点割不能导出唯一的$(K-1)$-可着色子图.

证：用反证法.若有图G的某一K-临界图的顶点割H导出一个唯一的$(K-1)$-可着色子图，且$G-H=A\cup B$，A与B不连通.

由于G是临界图，且$\chi(H)=K-1$，则$\chi(G-A)=K-1$，$\chi(G-B)=K-1$，但$G-(A\cup B)$有唯一着色，故在$G-A$与$G-B$的某$K-1$着色中H的着色是相同的.从而将G的顶点取在$G-A$与$G-B$中相同的着色处，则此着色是正常的（A、B不连通），从而$\chi(G)\leqslant K-1$，引出矛盾.

(49) 试证：①若u和v是临界图G的两个顶点，则　$N(u)\nsubseteq N(v)$；

②设有K-临界图恰好具有$K+1$个顶点.

证：①用反证法.若有u，v为临界图G的两顶点，满足　$N(u)\subseteq N(v)$.

于$\chi(G-v)=\chi(G)-1$，可对$G-u$进行$(\chi(G)-1)$正常着色，然后对u着上与v相同的色，则由此所得的对G的$\chi(G)-1$着色是正常的，引出矛盾.

②若有$(K+1)$个点的K-临界图H，有两点u、v着色相同，其余点着色均不同.则由于$N(u)\nsubseteq N(v)$，$N(v)\nsubseteq N(u)$，故存在u_i、v_i，使uu_i、vv_i不属于H，从而可先将$G-u-v$着$(K-1)$色，然后将u着与u_i相同色，v着与v_i相同色，即成为G的一个正常$(K-1)$着色，引出矛盾.

(50) 试证：若G是K-顶点可着色的，则G有一个典型K-顶点着色。

证：设$(V_1, V_2, \cdots, V_K)$是G的一个正常K-着色.由此可构造一个典型K-顶点着色：

取V_1'为包含V_1的G的最大独立集；

V_2'为包含V_2-V_1'的$(G-V_1')$的最大独立集；

V_3'为包含$V_3-(V_1'\cup V_2')$的$(G-(V_1'\cup V_2'))$的最大独立集

……

于是$(V_1', V_2', \cdots, V_K')$便是$G$的一个典型的$K$-顶点着色。

6. 可计数性

（51）证明波立亚计数定理：构形计数级数可以由将图形计数级数代入到构形群的循环指标中去而得到，即

$$C(x,\ y)=Z(A,\ C(x,\ y))^{X}.$$

证：令 α 是 A 中的一个置换，又令 $\bar{\alpha}$ 为幂群 E^A 中相应的置换。先假定 f 是 $\bar{\alpha}$ 不动的一个构形，而 ξ 是 α 的不相交循环分解中的一个长度为 K 的循环，则对 ξ 的表示式中的每一个元素 b，$f(b)=f(\xi b)$；* 所以，被 ξ 置换的所有元素在 f 下一定有同一个象。反之，若置换 α 的每一个循环中的元素在一个构形 f 下都有同一个象，则 $\bar{\alpha}$ 使 f 不动。不是，只要对 α 的每一个循环 ξ，在 R 中独立地选择一个元素 r，且对被 ξ 所置换的所有的 b，置 $f(b)=r$，即可得到所有的在 $\bar{\alpha}$ 下不动的构形。于是，若权 $\omega(r)$ 等于 $(m,\ n)$，其中 $m=\omega_1(r)$，$n=\omega_2(r)$，而 ξ 的长度等于 K，则循环 ξ 就使和式 $\sum_{f=\bar{\alpha}f}W(f)$ 有一个因式 $\sum_{r\in R}(x^m y^n)^K$。于是，因为

$$\sum_{r\in R}(x^m y^n)^K=C(x^K,\ y^K),$$

对于 A 中的每个 α，我们就有

$$\sum_{f=\bar{\alpha}f}W(f)=\sum_{k=1}^{S}C(x^K,\ y^K)^{j_K(\alpha)}.$$

将此方程的两边对 A 中所有的置换 α（或等价地，对 E^A 中所有的 α）求和，又将两边除以 $|A|=|E^A|$，我们得到

$$\frac{1}{|E^A|}\sum_{\bar{\alpha}\in E^A}\sum_{f\in\bar{\alpha}f}W(f)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\sum_{k=1}^{S}C(x^K,\ y^K)^{j_K(\alpha)}.\quad(*)$$

此方程的右边是 $Z(A,\ C(x,\ y))$。为了看出它的左边是 $C(x,\ y)$，我们根据伯恩赛德引理的解释。对幂群 E^A，轨的权和由下式给出：

$$\sum_{i=1}^{n}w(\theta_i)=\sum C_{mn}x^m y^n=C(x,\ y).\quad(**)$$

但由定理：$|A|\sum_{i=1}^{n}w(\theta_i)=\sum_{\alpha\in A}\sum_{x=\alpha x}w(x)$（其中 A 为作用在集 X 上的一个置换群，它有轨 θ_i，ω 是一个函数，它对每一个轨指定一个权；此外，当 $x\in\theta_i$ 时，$\omega(x)=\omega(\theta_i)$。）立即得到：（$*$）与（$**$）的左边是相等的。故有

$$Z(A,\ C(x,\ y))=C(x,\ y).$$

（52）证明定理：用有标数的计数级数来表示的树的计数级数由下列方程给出：

$$t(x)=T(x)-\frac{1}{2}[T^2(x)-T(x^2)].$$

证：对 $i=1$ 到 t_n，令 p_i^*、q_i^* 和 S_i 分别是有 n 个点的第 i 种树中，点的相似类、边的相似类和对称边的数目。因为对于每一个 i，按定理：$p^*-(q^*-S)=1$，有 $1=p_i^*-(q_i^*-S_i)$。我们对

---

* 此处记号的定义如下，在 $Z(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\prod_{K=1}^{n}a_K^{j_K}$ 中，我们记

$$Z(A)=Z(A;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n),\ 又记$$

$$Z(A,\ h(x,\ y))=Z(A;\ h(x,\ y),\ h(x^2,\ y^2),\ \cdots,\ h(x^n,\ y^n)).$$

，求和得到

$$t_n = T_n - \sum_i (q_i^* - S_i). \quad (*)$$

而且，$\Sigma(q_i^* - S_i)$ 是以一条不是对称边的边作为根的有n个点的树的数目．考察一个树T，又取T的任何一条不是对称边的边y．则$T-y$可以看作二个有根树，它们一定是不同构的．于是每一个树的每一条非对称边相应于不同有根树的一个无序对．计数这些树对，等价于计数从有二个可交换的元素的一个集到有根树的集中的1-1函数．于是我们应用定理，

$Z(D_4) = \frac{1}{8}(a_1^4 + 2a_1^2a_2 + 3a_2^2 + 2a_4)$，用$T(x)$为图形计数级数，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(q_i^* - S_i)x^n\right] = Z(A_2 - S_2,\ T(x)). \quad (**)$$

因为

$$Z(A_2) = a_1^2,\ Z(S_2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2),$$

我们有，

$$Z(A_2 - S_2,\ T(x)) = \frac{1}{2}[T^2(x) - T(x^2)] \quad (***)$$

由公式（*）－（***）得到

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2}[T^2(x) - T(x^2)].$$

三、图的代数表示

(一)结　　构

群表示

空间表示

矩阵表示

(图的描述)

邻接矩阵

路径(通路)矩阵

完全关联矩阵

关联矩阵

完全回路矩阵

基本回路矩阵

回路矩阵(圈)

完全割集矩阵

基本割集矩阵

割集(余圈)矩阵

权阵

表示

定义

判定特性

见后面(三)定理部分

各类矩阵间的关系

(二)概 念

1 .斜阵表示

（1）矩阵M：它是将 $-\mathbf{D}$（D为邻接矩阵）的第 i 个对角线元素换成 $\deg v_i$ 得到的矩阵；

矩阵$\mathbf{M}_x$：令 G 是有边 x_1、x_2、…、x_q 的一个标定图．定义 $p\times p$ 阶矩阵 $\mathbf{M}_x=[m_{ij}]$ 如下：

$$m_{ij}=\begin{cases}-x_k, & 若x_k=v_i\quad v_j\\ 0, & 若v_i和v_j不邻接\end{cases}\Bigg\}对\ i\neq j;$$

$$m_{ii}=-\sum_{n\neq i}m_{in}.$$

（2）拟阵：一个拟阵由一个有限的元素集 M 和 M 的非空子集的一个族 $\mathscr{C}=\{C_1，C_2，\cdots\}$ 所组成，C_i 称为回路，满足公理：

（1°）一个回路的真子集不是回路；

（2°）若 $e\in C_1\cap C_2$，则 $C_1\cup C_2-\{e\}$ 含有一回路．对于一个图 G，取它的边集 X 为集 M，取它的圈为回路，即可定义为一拟阵R．

拟阵：一个拟阵由一个有限的元素集 M 和 M 的一族称为独立集的子集组成，使

（1°）空集是独立的；

（2°）独立集的每一个子集是独立的；

（3°）对于 M 的每一个子集 A，所有含在 A 中的极大独立集的元素的数目都相等．对于一个图 G，取它的边集为集 M，取它的无圈子图为独立集，即产生一拟阵R．

（3）拟图：一个拟图由一个元素集 M 和 M 的非空子集的二个集簇 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 组成，这两个集的元素分称为回路和余回路，使

（1°）对任一 $C\in\mathscr{C}$ 和 $D\in\mathscr{D}$，$|C\cap D|\neq 1$；

（2°）无真含另一个回路的回路，也无真含另一个余回路的余回路；

（3°）不论如何将 M 按如下方式着色：使恰有一个元素为绿色，其余元素为红色或兰色，则或 a)．存在一回路 C 含绿色而不含红色元素；或 b)．存在一余回路 D 含绿色而不含蓝色元素．

（4）图拟阵：一个拟阵称为是图拟阵，若它是某个图的圈拟阵；

余图拟阵：一个拟阵称为是余图拟阵，若它是一个余圈拟阵；

（还有一类不是图拟阵或余图拟阵，如 n 阶旋拟阵）．

（5）$Okada$图形：（图3.1）

给定 $9_f=[9_{f11}I]$ 型矩阵

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1

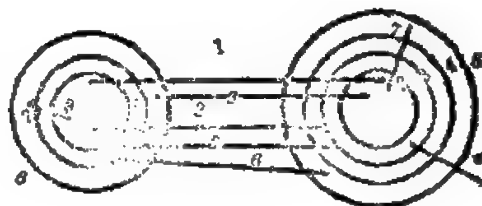


图3.1

所谓Okada图形是一个平面图形，它是根据矩阵$Q_f=[Q_{f11}]$由平面上的n_v-1个圆和n_e-n_v+1条线段构成（这里n_v-1是矩阵的行数，n_e-n_v+1是子阵Q_{f11}的列数），n_v-1个圆对应于形如上述矩阵的行，n_e-n_v+1条线段对应于形如上述矩阵的列。设n_v-1个圆为J_1，J_2，…，J_{n_v-1}；n_e-n_v+1条线段为I_1，I_2，…，$I_{n_e-n_v+1}$，它们满足下列条件：

（1°）没有两个J_h是相交的，但允许互相包含；

（2°）没有I_k的端点落在J_h上（$k=1$，2，…，n_e-n_v+1；$h=1$，2，…，n_{v-1}）

（3°）若$Q_f=[Q_{f11}]$矩阵的（h，k）位置上的元素是1，则J_h和I_k恰好交于一点，即I_k穿过J_h的地方。若（h，k）位置的元素是0，则J_h和I_k不相交；

（4°）每段I_k至少交于（即穿过）一个J_h，两条线段I_i、I_j允许互相交叉。

满足以上条件的图形，称为形如$Q_f=[Q_{f11}]$矩阵的Okada图形。

广义Okada图形：若用简单闭曲线代替圆Jk，用任一简单弧代替线段I_k，则满足上述条件的图形，称为形如$Q_f=[Q_{f11}]$矩阵的广义Okada图形。

（6）可实现的：一个形如$Q_f=[Q_{f11}]$的矩阵，若存在一个图G，以它为基本割集矩阵，则我们称这个矩阵是可实现的。

2．空间表示

（7）特征函数：对任意的$x\in X$，称

$$\theta_x:\ X\to C$$

为x的特征函数；它的定义是：

$$\theta_x(t)=\begin{cases}1, & 若\ t=x,\\ 0, & 若\ t\neq x.\end{cases}$$

（8）点（边）空间：设$C_0(G)=\{f|f:V(G)\to C\}$，$C_1(G)=\{f|f:E(G)\to C\}$，其中$V(G)$、$E(G)$分别是图G的顶点集和边集，并设$V(G)$和$E(G)$的元素个数分别为n和m。易知$C_0(G)$和$C_1(G)$分别构成n维线性空间和m维线性空间，分称为图G的点空间和边空间。

基底：$C_0(G)$——取一组标准基底$\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\}$，此处$\omega_i(v_j)=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & 否则.\end{cases}$

$C_1(G)$——取一组标准基底$\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_m\}$，此处$e_i(e_j)=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & 否则.\end{cases}$

函数：$\eta\in C_0(G)$，可用列向量$\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]^T$示之，其中$a_j=\eta(v_j)$。

函数$\xi\in C_1(G)$，可用列向量$\mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m]^T$示之，其中$b_i=\xi(e_i)$。

（9）关联映射：对于标准基底，完全关联矩阵表示空间$C_1(G)$到空间$C_0(G)$的一个线性映射，这个映射称为关联映射，用A示之。

对于每一个$\xi\in C_1(G)$，$A\xi$：$V(G)\to C$定义为 $A\xi(v_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\xi(e_j)(1\leqslant i\leqslant n)$，

其中a_{ij}为完全关联矩阵$\mathbf{A}_c$中的元素。完全关联矩阵建立了$C_0(G)$空间与$C_1(G)$空间之间的联系。

(10) 0-链：令G是一个图，它有点v_1，…，v_p和边e_1，…，e_q。点的一个形式的线性组合$\Sigma\varepsilon_i v_i$，称为G的一个0-链。（其中ε_i为0或1）。

1-链：边的一个形式的线性组合$\Sigma\varepsilon_i e_i$，称为G的一个1-链。

(11) 边缘算子∂：是将1-链变换为0-链的一个算子，满足：

a）δ是线性的；b）$e=uv\Rightarrow\partial e=u+v$。

上边缘算子δ：是将0-链变换为1-链的一个算子，满足：

a）δ是线性的；b）$\delta_v=\Sigma\varepsilon_i e_i$（此处当$e_i$关联于$v$时，$\varepsilon_i=1$）。

（显然，G的一个上边缘是G中某个0-链的上边缘）。

(12) 圈向量：一个边缘等于0的1-链称为G的一个圈向量。

圈空间：所有圈向量的集构成F_2上的一个向量空间，称为G的圈空间。

圈基：G的一个圈基定义为G的圈空间的一个基，而且这个其中每一个元素都是圈。

圈秩$m(G)$：是G的圈空间的一个基中圈的数目。

(13) 余圈：是一个最小的割集。

余圈空间：G的所有上边缘的集称为G的余圈空间。

余圈基：余圈空间的一个全部由余圈组成的基称为G的一个余圈基。

余圈秩$m^*(G)$：是G的余圈空间的一个基中余圈数目。

3. 群表示

[自同构群]

(14) 么图：一个给定的公理系统的任何一个模型都有一个自同构群，图也不例外。若图G中，从V到V上的恒等映射是其唯一的自同构，则称此图为么图。（图3.2）



图3.2

(15) 置换：有限集到自身上的一个一一映射称为置换（映射的通常的复合，构成了同一个集上的置换的一个二元运算）。

(16) 群：群由一个非空集A和一个二元运算构成，这个二元运算用连写A中的二个元素a_1和a_2成为a_1a_2来记，并且满足下列四个定理：

公理1 （封闭性）对A中所有的a_1、a_2，a_1a_2也是A的一个元素；

公理2 （结合性）对A中的所有的a_1、a_2、a_3，有

$$a_1(a_2a_3)=(a_1a_2)a_3;$$

公理3 （单位元素）A中有一个元素i，对于A中所有的元素a有

$$ia=ai=a;$$

公理4 （逆元素）若公理3成立，则对A中每一个元素a，有一个元素，记作a^{-1}，使

$$aa^{-1}=a^{-1}a=i。$$

(17) 置换群：当置换的一个集对于这种运算封闭时，公理2、3和4自然满足，它就称为一个置换群。

阶与度：若一个置换群A作用在对象集X上，则$|A|$称为这个群的阶，而$|X|$称为是它的度。

(18) 同构的群：设A和B分别为作用在集X和Y上的置换群。若在这两个群的置换间存在一个一一映射h：$A\longleftrightarrow B$，使对A中所有的a_1，a_2，　　$h(a_1a_2)=h(a_1)h(a_2)$，

则称 A 和 B 是同构的群，记作 $A\cong B$。

(19) 恒等的置换群：若除了同构间，还需要在这两个群的对象间存在一个一一映射 f：$X\leftrightarrow Y$，使对 X 中的所有的 x 和 A 中所有的 α，

$$f(\alpha x)=h(\alpha)f(x),$$

则称 A 与 B 是恒等的置换群，记作 $A\equiv B$。

(20) 自同构：一个图 G 的一个自同构是 G 与它自身的一个同构，于是，G 的每一个自同构 α 是点集 V 的一个保持邻接性的置换。

(21) G 的群（或点群）：任何一个自同构继以另一个自同构也是一个自同构，从而 G 的自同构构成一个作用在 G 的点上的置换群 $\Gamma(G)$，它称为 G 的群，或称为 G 的点群。

(22) 边群：G 的点群导出另外一个置换群 $\Gamma_1(G)$，称为 G 的边群，它作用在 G 的边上。

[置换群的运算]

(23) 令 A 为一个置换群，其阶 $m=|A|$，度为 d，它作用在 $X=\{x_1, \cdots, x_d\}$ 上；B 为另一个置换群，其阶 $n=|B|$，度为 e，它作用在集 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_e\}$ 上。

运　算	作用对象	元　　素	阶	度
和 $A+B$	不相交的并 $X\cup Y$	$A+B=\{\alpha+\beta \mid \alpha\in A, \beta\in B\}$（$\alpha$、$\beta$ 为置换）。 $(\alpha+\beta)(Z)=\begin{cases}\alpha Z, & 当 Z\in X;\\ \beta Z & 当 Z\in Y。\end{cases}$	mn	$d+e$
积 $A\times B$	$X\times Y$	$A\times B=\{\alpha\times\beta \mid \alpha\in A, \beta\in B\}$ $(\alpha\times\beta)(x, y)=(\alpha_x, \beta_y)$。	mn	de
合成 $A[B]$	$X\times Y$	对 A 中的每一个 α 和 B 中的 d 个置换的序列 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d)$ 在 $A[B]$ 中有唯一的置换 $(\alpha; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d)$，使得对于 $X\times Y$ 中的 (x_i, y_j) 有 $(\alpha; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d)\ (x_i, y_j)=(\alpha x_i, \beta_i y_j)$。	mn^d	de
幂 B^A	Y^X	对于每一对 A 中的置换 α 和 B 中的置换 β，在 B^A 中对应有唯一的一个置换，记作 β^α。 $(\beta^\alpha f)(x)=\beta f(\alpha x)$	mn	e^d

[复合图的群]

(24) 素的：对于一个非平凡图 G，若 $G=G_1\times G_2$ 蕴含 G_1 或 G_2 是平凡的，则 G 称为是素的；若 G 不是素的，则它称为是复合的。

(25) 邻域：一个点 u 的邻域是由所有与 u 邻接的点 v 构成的集 $N(u)$。闭邻域 $N[u]=N(u)\cup\{u\}$。

(26) 冠：两个图 G_1 和 G_2 的冠 $G_1\circ G_2$ 是一个图

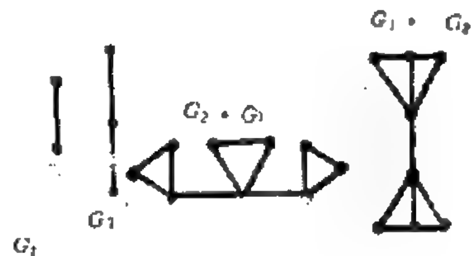


图3.3

G，由取一个G_1（它有p_1个点）和p_1个G_2，然后联结G_1的第i个点和第i个G_2的每一个点来构成．(图3.3)

［有给定群的图］

（27）色图：F的色图，记作$D(F)$，是一个完全对称的有向图，它的点是F的n个元素．此外，对于$D(F)$的每一条弧，例如由f_i到f_j的弧，标上指定给F的元素$f_i^{-1}f_j$的颜色．(图3.4)

［对称图］

（28）相似：图G的两个点u和v称为相似的，若对G的某一个同构α，$\alpha(u)=v$．不相似于其他任何一点的点称为不动点．

两条边$x_1=u_1v_1$和$x_2=u_2v_2$称为相似的，若有G的一个自同构α，使$\alpha(\{u_1, v_1\})=\{u_2, v_2\}$。

（29）点对称：若它的每一对点是相似的；（图3.5）

循环群C_3的色图：

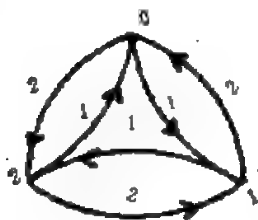
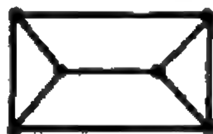


图3.4

点对称图：



边对称图：



图3.5

边对称：

若它的每一对边是相似的；（图3.5）

对称：若它既是点对称的又是边对称的。

（30）边的度：一条边$x=uv$的度是无序对(d_1, d_2)，其中$d_1=\deg u$和$d_2=\deg v$.

（31）边正则的：一个图是边正则的，若所有的边都有相同的度．

［高度对称图］

（32）n-路：一条n-路是一条长度为n且有确定的起点的通道，其中没有一条边接在它自己的后面．

n-可迁的：一个图G称为n-可迁的，$n\geq 1$，若它有一条n-路，并且对于G的每一条n-路总有一个自同构将它映到另外任何一条n-路上．（图3.6）

（33）后继：若W是一条n-路$v_0v_1\cdots v_n$，又u是除v_{n-1}外任何一个邻接于v_n的点，则n-路$v_1\cdots v_nu$称为W的一条后继．

（34）n-单可迁的：一个图G称为是n-单可迁的，若它是连通的、三次的、n-可迁的，而且若有任何两条n-路W_1和W_2，G恰有一个自同构α，使$\alpha W_1=W_2$．（图3.7）

（35）笼：对于$n\geq 3$，一个n-笼是一个有最少可能数目的点而围长等于n的三次图．

（36）α-置换图：对于S_p中的任何一个置换α，一个标定图G的α-置换图是不相交的两G：G_1和G_2的并，再加上联结G_1的点v_i和G_2的点$v_{\alpha(i)}$的边．



图3.6

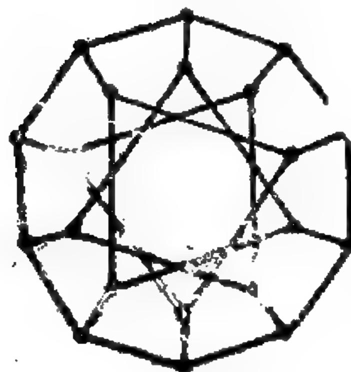


图3.7

（三）　定理

1．矩阵表示

（1）令G是一个有邻接矩阵D的标定图⟹D^n的i，j元是由v_i到v_j的长度等于n的通道的数目。

（2）对于$i \neq j$ D^2的i，j元是从v_i到v_j的长度为2的道路的数目；D^2的i，i元是v_i的度；D^3的i，i元是含v_i的三角形的数目的两倍。

（3）若G是连通的，对于$i \neq j$，v_i与v_j之间的距离是使D^n的i，j元不等于零的最小整数n。

（4）图G是一个具有G_1和G_2两个连通片的非连通图⟺G的邻接矩阵可以分块为

$$D(G)=\begin{bmatrix} D(G_1) & 0 \\ 0 & D(G_2) \end{bmatrix}$$

（其中$D(G_1)$和$D(G_2)$分别是G_1和G_2的邻接矩阵）。

（5）一个具有n_e条边，n_v个顶点的不可分二端图G的路径矩阵P的$r = n_e - n_v + 2$

（6）完全关联矩阵A_i的秩等于所示图的秩（连通图$r = n_v - 1$，分离图$r = n_v - p$）。

（7）连通图G的关联矩阵的一个大子阵是非奇异的⟺与此大子阵的列相应的边组成G的一棵生成树。

（8）连通图G的生成树的数目为$\det(A_K A_K^T)$。

（9）$G(p,q) \Rightarrow D(L(G)) = A^T A - 2I_q$（$I_q$是$q \times q$阶单位阵）。

（10）（矩阵-树定理）令G为一个有邻接矩阵D的连通的标定图⟹矩阵M的所有余因子都相等，且其公共值是G的生成树的数目。

（11）（变元矩阵-树定理）矩阵M_x的任何一个余因子的值是G的树多项式（G的一个生成树的项是指它的边的积；G的树多项式是它的各个生成树的项的和）。

（12）有p个点的标定树的数目为p^{p-2}。

（13）连通图的完全回路矩阵的秩等于$n_e - n_v + 1$（有p个分支的分离图的完全回路矩

阵的秩等于$n_e - n_v + p$）．

（14）连通图的基本回路矩阵的秩等于$n_e - n_v + 1$．

（15）连通图G关于生成树T的基本回路矩阵$\mathbf{B}_f$可写成$\mathbf{B}_f = [\mathbf{I}\mathbf{B}_{f12}]$．其中$\mathbf{I}$为$n_e - n_v + 1$阶单位阵，它的列对应连枝集，$B_{f12}$的列对应$T$的树枝。

（16）设图是一个具有n_v个顶点，n_e条边的无向连通图，它的完全回路矩阵$\mathbf{B}_c$，可按下列步骤获得：

（1°）任选G的一个树T，写出树T的基本回路矩阵$\mathbf{B}_f$；

（2°）在$\mathbf{B}_f$的行中进行所有可能的环和运算，由$\mathbf{B}_f$原有的行，加上环和产生的新行，共同排成新矩阵$\mathbf{B}_1$；

（3°）在$\mathbf{B}_1$中消去代表边不相接的回路的行；

（4°）$\mathbf{B}_1$中留下的行，组成了完全回路矩阵B_c．

（17）一个回路矩阵的大子阵是非奇异的⟺它的列代表一棵生成树的连枝集．

（18）连通图G的完全割集矩阵的秩等于$n_v - 1$（有p个分支的分离图的完全割集矩阵的秩是$n_v - p$）．

（19）连通图的基本割集的秩是$n_v - 1$．

（20）连通图G的基本割集矩阵$\mathbf{Q}_f$可以写成

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_{f11}\mathbf{I}]$$

其中$\mathbf{I}$是$n_v - 1$阶单位矩阵，它的列对应图G的树枝，$\mathbf{Q}_{f11}$的列对应于G的连枝．

（21）设G是一连通的无向图，具有n_v个顶点、n_e条边，G的完全割集矩阵$\mathbf{Q}_c$，可按下述算法求得：

（1°）选择树T，列出对应树T的基本割集矩阵$\mathbf{Q}_f$，基本割集对应矩阵的行，边e对应其列；

（2°）在$\mathbf{Q}_f$中执行所有可能的环和，求得θ_1，它包含θ_f中的$n_v - 1$行和由环和产生的新行；

（3°）从θ_1中移去冗余行；

（4°）θ_1中留下的行，即所求的完全割集矩阵$\mathbf{Q}_c$．

（22）图G的割集矩阵Q的大子阵是非奇异的⟺这个大子阵的列对应于某生成树T的树枝．

（23）形如$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_{f11}\mathbf{I}]$的矩阵是可实现的⟹它有一个Okada图形；反之，形如上述矩阵有一个广义的Okada图形⟹它是可实现的．

2．空间表示

（24）集合$\mathscr{G} = \{G_1, G_2, \cdots, G_N\}$，$N = 2^{n_e}$在环和运算与数乘运算（$0G_i = \phi$，$1 \cdot G_i = G_i$；$G_i \in \mathscr{G}$）下构成域$F = \{0, 1\}$上的一个$n_e$维线性空间．（$\mathscr{G}$即由全部子图组成之集合）．

（25）特征函数的性质：

（1°）设x_1、x_2、…、x_K是X中的不同元素⟹特征函数θ_{x1}、θ_{x2}、…、θ_{xK}线性无关；

（2°）有限集合X的元素的特征函数的集合$\theta = \{\theta_x\ x \in X\}$可以生成空间$\mathscr{F}_C(X)$．

（26）图G的所有断集和空集的集合$\mathscr{B}$作成空间$\mathscr{G}$的一个子空间，称为图G的断集空间，记作$\mathscr{B}(G)$．

(27) n_v阶连通图G的n_v-1个线性无关的关联集是G的断集空间的一组基底，且G的断集空间的维数是n_v-1.

(28) 设S_1、S_2、…、S_{n_v-1}是图G的基本割集组$\Longrightarrow S_1$、S_2,…,S_{n_v-1}是线性无关的.

(29) 图G的任一断集均可表成若干基本割集之环和。

(30) 图G的关于生成树T的基本割集组是G的断集空间的一组基底.

(31) n_v阶连通图G的断集空间的元素的个数是2^{n_v-1}（包括空集）.

(32) 基本回路C_1、C_2、…、$C_{n_e-n_v+1}$是线性无关的.

(33) 连通图G的任一环路均可表成若干条基本回路之环和.

(34) 连通图G的所有环路和空集的集合构成空间$\mathscr{C}$的一个n_e-n_v+1维子空间，称为G的环路空间，记作$\mathscr{C}(G)$。

(35) 有p个分支的分离图G的环路空间的维数是n_e-n_v+p.

(36) 连通图G的环路空间中元素的个数为$2^{n_e-n_v+1}$.

3. 群表示

[自同构群]

(37) $\Gamma(G)$（点群）$\cong\Gamma_1(G)$（边群）$\Longleftrightarrow G$至多有一个弧立点，且K_2不是G的一个支.

(38) 两个有相同的度和相同的循环结构的置换群，不一定是恒等的.

[置换群的运算]

(39) 三个群$A+B$，$A\times B$，B^A是同构的.

(40) a) 群$\Gamma(G)$是$S_p\Longleftrightarrow G=K_p$或$G=\bar{K}_p$;

b) G是长度等于p的一个圈$\Longrightarrow\Gamma(G)=D_p$.

（其中S_p和D_p是两个特殊的度等于p的置换群）.

[复合图的群]

(41) 一个图和它的补图都有同一个群，$\Gamma(\bar{G})=\Gamma(G)$.

(42) G是一个连通图$\Longrightarrow\Gamma(nG)=Sn[\Gamma(G)]$.

(43) G_1和G_2是不相交的、连通的且不同构的$\Longrightarrow\Gamma(G_1\cup G_2)\equiv\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2)$.

(44) $\Gamma(G)=S_{n_1}[\Gamma(G_1)]+S_{n_2}[\Gamma(G_2)]+\cdots+S_{n_r}[\Gamma(G_r)]$.

(45) $\Gamma(G_1\cup G_2)\equiv\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2)\Longleftrightarrow G_1$没有一个支同构于$G_2$的一个支.

(46) $\Gamma(G_1+G_2)\equiv\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2)\Longleftrightarrow\bar{G}_1$没有一个支同构于$\bar{G}_2$的一个支.

(47) $\Gamma(G_1\times G_2)\equiv\Gamma(G_1)\times\Gamma(G_2)\Longleftrightarrow G_1$和$G_2$互素.

(48) $\Gamma(G_1[G_2])\equiv\Gamma(G_1)[\Gamma(G_2)]\Longleftrightarrow$当$G_1$不是个不连通的，且$a$) 若$G_1$中有两个点有相同的邻域，则$G_2$是连通的；$b$) 若$G_1$中有两个点有相同的闭邻域，则$\bar{G}_2$是连通的，成立时.

(49) $\Gamma(G_1\circ G_2)\equiv\Gamma(G_1)[E_1+\Gamma(G_2)]\Longleftrightarrow G_1$或$G_2$无孤立点.

(50) 两个图的冠$G_1\circ G_2$的群同构于它们的群的合成$\Gamma(G_1)[\Gamma(G_2)]\Longleftrightarrow G_1$或$\bar{G}_2$没有孤立点.

[有给定群的图]

(51) 每一个有限群F同构于$D(F)$的那些保持弧的颜色的自同构的群（此处$D(F)$是F的色图）.

(52) 对于每一个有限的抽象群$F\Longrightarrow$存在一个图G，使$\Gamma(G)$与F同构.

(53) 给定任何一个有限的、抽象的、非平凡的群F和一个整数j（$1\leqslant j\leqslant 4$），有无限多个不同胚的图G，使G为连通的，没有一个点在每一个自同构下都是不动点，$\Gamma(G)\cong F$，G还具有性质P_j，它们定义为：

P_1：$\chi(G)=n$，$n\geqslant 1$，

P_2：$\chi(G)=n$，$n\geqslant 2$，

P_3：G是n度正则的，$n\geqslant 3$，

P_4：G有一个生成子图，它同胚于一个给定的图.

(54) 给定任何一个有限群F和整数n和m，其中$n\geqslant 3$及$2\leqslant m\leqslant n$，有无限多个图G，使$\Gamma(G)\cong F$，$\chi(G)=m$，且G是n度正则的.

[对称图]

(55) u和v相似$\Longrightarrow G-u\cong G-v$.

(56) 每一个没有孤立点的边对称图是点对称的或是二部的.

(57) G是边对称的，且每一条边的度是$(d_1,\ d_2)$，而$d_1\neq d_2\Longrightarrow G$是二部的.

(58) 一个没有孤立点的图是边对称的，有奇数个点，又每一条边的度为g $(d_1,\ d_2)$，而$d_1=d_2\Longrightarrow$它是点对称的.

(59) G是边对称的，有偶数个点，它又是$d\geqslant p/2$度正则的$\Longrightarrow G$是点对称的.

(60) 当$p\geqslant 20$且可以被4整除时$\Longrightarrow$存在一个有p个点的正则图G，它是边对称的但不是点对称的.

[高度对称图]

(61) 令G是一个没有端点的连通图，W是一条n-路使得对于W的每一条后继有G的一个自同构将W映到这条后继上$\Longrightarrow G$是n-可迁的.

(62) G是连通的、n-可迁的，而不是一个圈，它没有端点，围长为$g\Longrightarrow n\leqslant 1+g/2$.

(63) 对于每一个$n\geqslant 3$，存在一个n-笼. 对于$n=3$到8，有唯一的n-笼，这些笼都对于某个$t=t(n)$是t-单可迁的，其中$t(3)=2$，$t(4)=t(5)=3$，$t(6)=t(7)=4$和$t(8)=5$

(四)题　　解

(1) 求出右图（图3.8)的邻接矩阵和完全关联矩阵.

解：邻接矩阵**D**：

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

完全关联矩阵$\mathbf{A}_c$：

$$\mathbf{A}_c=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

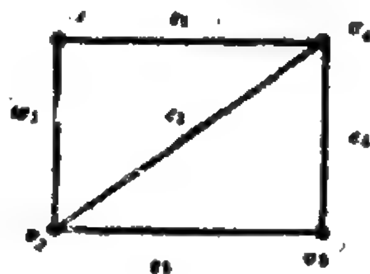


图3.8

（2）画出多重图G，它的邻接矩阵如下：

$$D=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\3&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}$$

解：：图G为

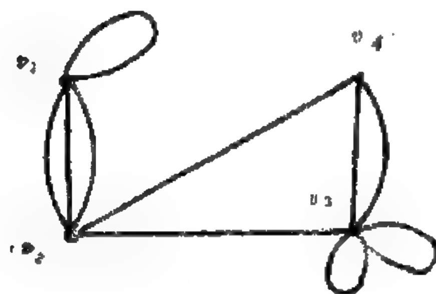


图3.9

（3）画出图G，它的关联矩阵如下：

$$A\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

解：它为描述的图有5个顶点，9条边，且其图不是唯一的．例如（图3.10）：

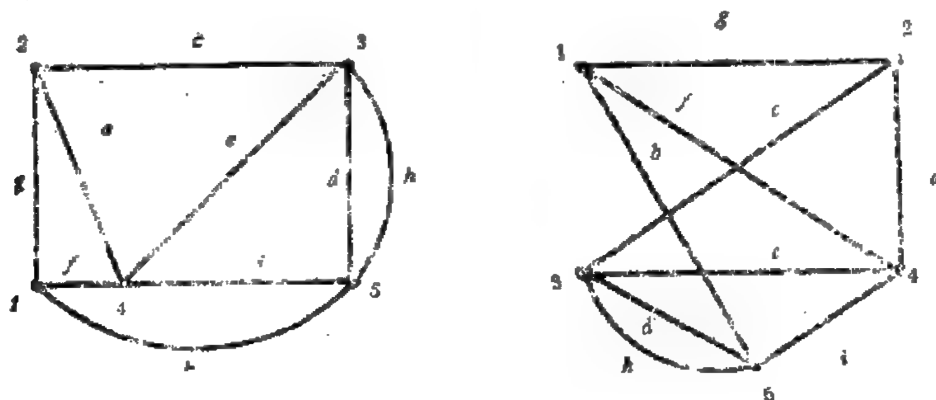


图3.10

（4）求出下图（图3.11）G的完全回路矩阵．

解：取G的一棵生成树$T=\{a, b, c, d\}$，连枝集是$\{e, f, g\}$，图G关于T的基本回路组是

$$C_1=\{b, c, g\},$$
$$C_2=\{a, b, c, f\},$$
$$C_3=\{a, b, c, d, e\}.$$

基本回路的各种可能的线性组合是

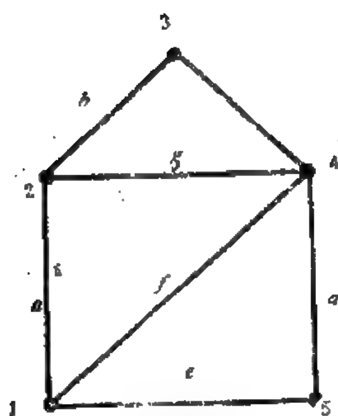


图3.11

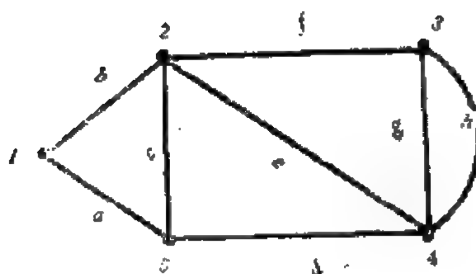


图3.12

$$C_4 = C_1 \oplus C_2 = \{a, f, g\},$$
$$C_5 = C_1 \oplus C_3 = \{a, d, e, g\},$$
$$C_6 = C_2 \oplus C_3 = \{d, e, f\},$$
$$C_7 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 = \{b, c, d, e, f, g\}.$$

于是G的完全回路矩阵$\mathbf{B}$是：

$$\mathbf{B}_e = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

（5）证明定理：设图G关于生成树T的基本回路矩阵和基本割集矩阵分别是

$$\mathbf{B}_f = [I\ \mathbf{B}_{f12}], \qquad \mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_{f11}\ I],$$

且它们的列与所表示的边的次序相同，则

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{B}^T_{f12}\ I],$$
$$\mathbf{Q}_f = [I\ \mathbf{Q}^T_{f11}].$$

证：由等式

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{B}^T_f = [\mathbf{Q}_{f11}\ I]\begin{bmatrix} I \\ \mathbf{B}^T_{f12} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{f11} + \mathbf{B}^T_{f12} = 0,$$

有

$$\mathbf{Q}_{f11} = \mathbf{B}^T_{f12},$$

于是

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{B}^T_{f12}\ I].$$

同理可证

$$\mathbf{B}_f = [I\ \ \mathbf{Q}^T_{f11}].$$

（6）试求上图（图3.12）的基本回路矩阵与基本割集矩阵.

解：取G的一棵生成树$T = \{a, c, e, g\}$. G关于T的基本回路组是

$C_1=\{a, b, c\}$,

$C_2=\{c, d, e\}$,

$C_3=\{e, f, g\}$,

$C_4=\{g, h\}$。

于是G关于T的基本回路矩阵是

$$
\mathbf{B}_f=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccc:cccc} b & d & f & h & a & c & e & g \\ \end{array}
$$

$$
\mathbf{B}_f=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\mathbf{B}_{f12}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T_{f12}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

由此可得，G的基本割集矩阵是

$$
\begin{array}{cccc:cccc} b & d & f & h & a & c & e & g \end{array}
$$

$$
\mathbf{Q}_f=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

（7）设集合$\mathscr{G}=\{G_1, G_2, \cdots, G_N\}$，$N=2^{n_e}$在环和运算与数乘运算

$$0\cdot G_i=\phi,\quad 1\cdot G_i=G_i, \qquad (G_i\in\mathscr{G})$$

下构成域$F=\{0, 1\}$上的一个n_e维线性空间。

证：首先，$\mathscr{G}$对环和运算是封闭的。这是因为，$G_i\oplus G_j$是由除去G_i和G_j中的公共边的所有边（连同与它们关联的顶点）组成的一个子图，且环和运算满足交换律和结合律。

对于任意的$G_i\in\mathscr{G}$，有

$\phi\oplus G_i=G_i\oplus\phi=G_i$，$G_i\oplus G_i=\phi$，故空集$\phi$是零元素，$G_i$的负元素是$G_i$自身。

对于任意的a，$b\in F$和任意的G_j，$G_i\in\mathscr{G}$，有

$$(ab)G_i=a(bG_i),$$

$$(a+b)G_i=aG_i\oplus bG_i,$$

$$a(G_i\oplus G_j)=aG_i\oplus aG_j.$$

这是因为a，b只能取0或1，故用穷举法，将a，b的各种取值情况一一代入验算，即可证明上面三个等式成立。

其次，设G的边集是$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_{n_e}\}$，

考虑集合 $S=\{g_1, g_2, \cdots g_{n_e}\}$，

其中g_i是仅由一条边e_i（$i=1, 2, \cdots, n_e$）组成的子图。

对任意的$G_i \in \mathscr{Y}$，若G_i的边集是$\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_m}\}$，则

$$G_i = g_{i_1} \oplus g_{i_2} \oplus \cdots \oplus g_{i_m},$$

即G的任一子图均可由S生成．

最后，证明$g_1, g_2, \cdots, g_n$是线性无关的．事实上，若有一组不完为零的C_i（C_i是0或1）使得

$$C_1 g_1 \oplus C_2 g_2 \oplus \cdots \oplus C_n g_n = \phi, \quad (*)$$

不失一般性，可假设$C_K = 1$，此时有$c_K g_K = g_K$，因所有的$c_i g_i$（$i \neq k$）中均不含e_k边，故它们与g_k的环和必含有边e_k，这与等式（*）相矛盾，因此$g_1, g_2, \cdots, g_n$线性无关．于是S是G的所有子图作成的线性空间$\mathscr{Y}$的一组基底，且$\mathscr{Y}$的维数是n．

（8）图G如右图（图3.13）所示，求其构成的线性空间

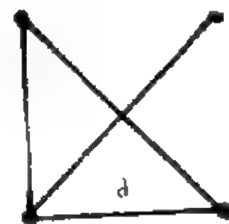


图3.13

解：设图G的所有子图的集合为

$$\mathscr{Y} = \{\phi, G, G_1, G_2, \cdots, G_{14}\},$$

它们的图如下（图3.14）所列：

图3.14

我们建立G的子图和向量的对应关系如下：

$$G_i \leftrightarrow X_i=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n_e}),$$

其中

$$x_j=\begin{cases}1, & e_j\in G_i,\\ 0, & e_j\notin G_i.\end{cases}$$

这样，我们在空间$\mathscr{Y}$和n_e维的量集合F_{n_e}之间建立了一个一一对应，即

$$G_i\in\mathscr{Y}\leftrightarrow X_i\in F_{n_e},$$

且

$$\phi\leftrightarrow(0,\ 0,\ \cdots,\ 0),$$

$$G\leftrightarrow(1,\ 1,\ \cdots,\ 1).$$

$\mathscr{Y}$的一组基底对应F_n的一组基底：

$$(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\leftrightarrow\{e_1\},$$

$$(0,\ 1,\ \cdots,\ 0)\leftrightarrow\{e_2\},$$

……………………………………………

$$(0,\ 0,\ \cdots,\ 1)\leftrightarrow\{e_{n_e}\}.$$

因此，集合$\mathscr{Y}$构成了域$F=\{0,\ 1\}$上的一个4维线性空间，其基底为

$$S=\{G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4\}.$$

图3.15

（9）求图G（如右图3.15所示）的环路空间的一组基底和它的全部元素.

解：取G的一棵生成树T为

$T=\{a,\ b,\ d,\ g\}$（图中粗线所示），图G关于T的基本回路组为

$$C_1=\{a,\ b,\ c\},$$

$$C_2=\{a,\ b,\ d,\ e\},$$

$$C_3=\{a,\ b,\ d,\ g,\ h\},$$

$$C_4=\{d,\ f,\ g\}.$$

它们的图形如下图（图3.16）所示：

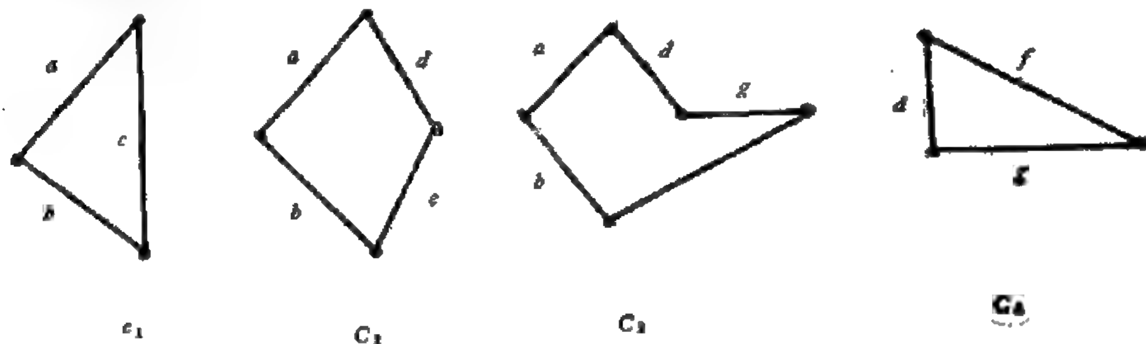


图3.16

C_1，C_2，C_3，C_4的各种可能的环和是

$$B_1=C_1\oplus C_2=\{c,\ d,\ e\},$$

$$B_2=C_1\oplus C_3=\{c,\ d,\ g,\ h\},$$

$$B_3=C_1\oplus C_4=\{a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ g\},$$

$B_4 = C_2 \oplus C_3 = \{e, g, h\}$,

$B_5 = C_2 \oplus C_4 = \{a, b, e, f, g\}$,

$B_6 = C_3 \oplus C_4 = \{a, b, f, h\}$,

$B_7 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 = \{a, b, c, e, g, h\}$,

$B_8 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 = \{c, e, f, g\}$,

$B_9 = C_1 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{c, f, h\}$,

$B_{10} = C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{d, e, f, h\}$,

$B_{11} = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 = \{a, b, c, d, e, f, h\}$.

它们的图形分别是（图3.17所示）：

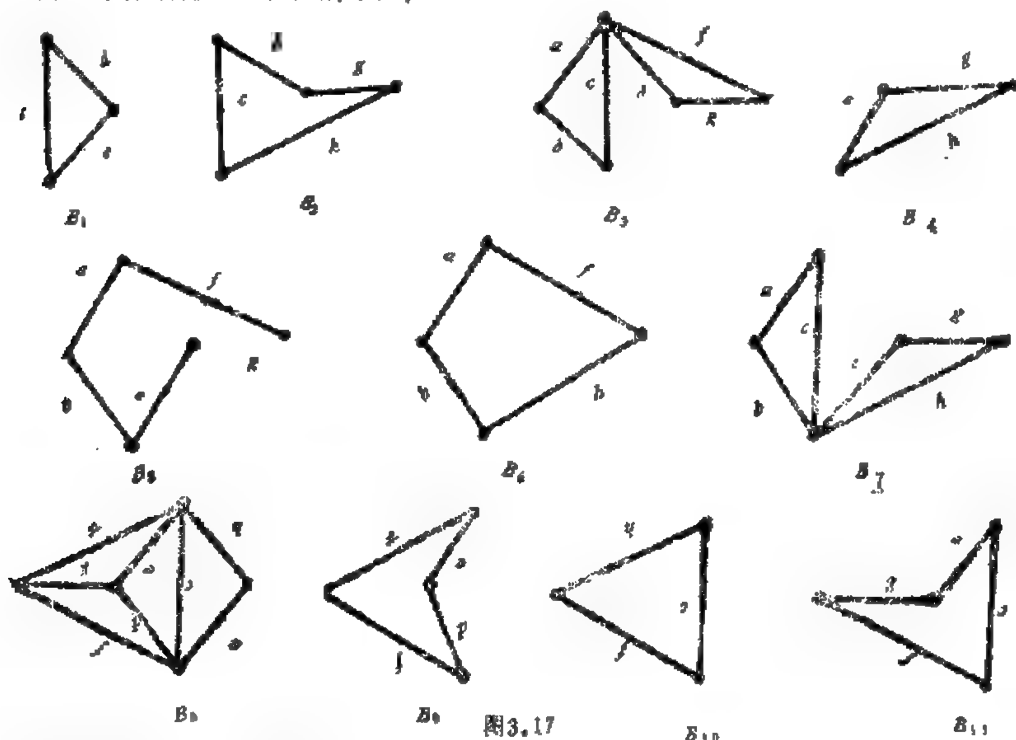


图3.17

图G的环路空间的全部元素是

$$\mathscr{J}(G) = \{\phi, C_1, C_2, C_3, C_4, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}\},$$

其中的C_1, C_2, C_3, C_4是环路空间的一组基底.

（10）求图G（如图3.18所示）的断集空间和它的一组基底.

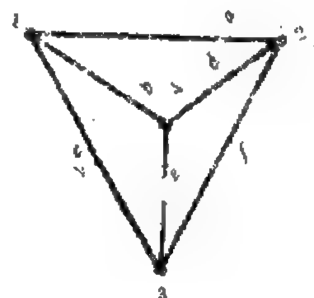


图3.18

解：顶点1，2，3的关联集分别是

$S(1) = \{a, b, c\}$,

$S(2) = \{a, d, f\}$,

$S(3) = \{c, e, f\}$.

它们的图形分别是（图3.19所示）：

显然，$S(1)$、$S(2)$、$S(3)$是线性无关的；因此，$S(1)$、$S(2)$、$S(3)$作成G的断集空间的一组基底，基底中

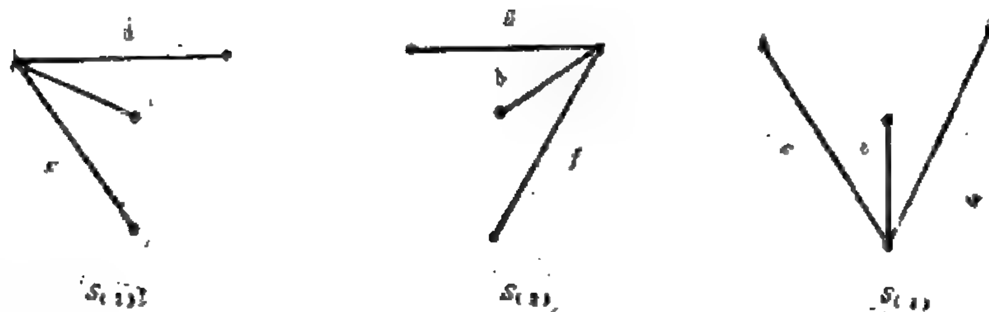


图3.19

元素的线性组合是

$$S(1)\oplus S(2)=\{b,\ c,\ d,\ f\},$$
$$S(1)\oplus S(3)=\{a,\ b,\ e,\ f\},$$
$$S(2)\oplus S(3)=\{a,\ c,\ d,\ e\},$$
$$S(1)\oplus S(2)\oplus S(3)=\{b,\ d,\ e\}.$$

它们的图形是（图3.20所示）：

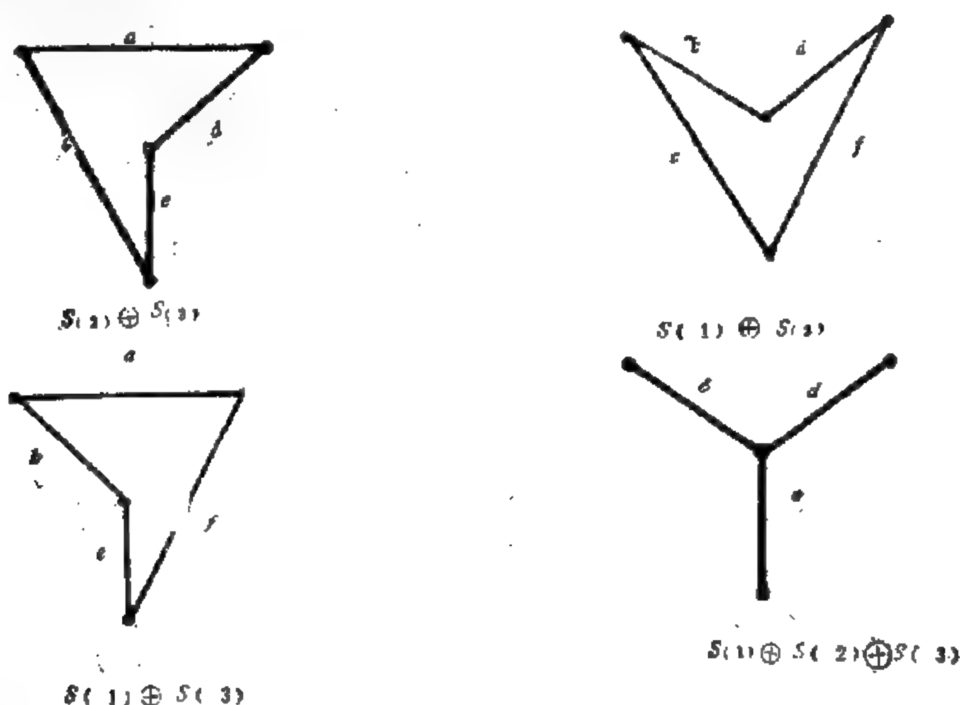


图3.20

图 G 的断集空间 $\mathscr{S}(G)$ 是

$$\mathscr{S}(G)=\{\varphi,\ \{a,\ b,\ c\},\ \{a,\ d,\ f\},\ \{c,\ e,\ f\},\ \{b,\ c,\ d,\ f\},\ \{a,\ b,\ e,\ f\},\ \{a,\ c,\ d,\ e\},\ \{b,\ d,\ e\}\}.$$

可以验证，顶点2，3，4的关联集

$$S(2)=\{a,\ d,\ f\},$$
$$S(3)=\{c,\ e,\ f\},$$
$$S(4)=\{b,\ d,\ e\}.$$

也是G的一组基底，G的断集空间的全部非零元素也可以由这组基底生成。

（11）证明定理：一个图G的边群和点群同构当且仅当G至多有一个孤立点，且K_2不是G的一个支。

证：令α'是$\Gamma_1(G)$中的置换（$\Gamma_1(G)$为G的边群），它由$\Gamma(G)$中的置换α导出。按照$\Gamma_1(G)$中积的定义，对于$\Gamma(G)$中所有的α、β，我们有

$$\alpha'\beta'=(\alpha\beta)'.$$

于是映射$\alpha\to\alpha'$是从$\Gamma(G)$到$\Gamma_1(G)$上的一个群同态。从而

$$\Gamma(G)\cong\Gamma_1(G)$$

当且仅当这个映射的核是平凡的。

必要性：假设$\Gamma(G)\cong\Gamma_1(G)$。则$\alpha\neq i$（恒等置换）蕴含$\alpha'=i$。若$G$有不同的孤立点$v_1$和$v_2$，我们可以定义$\alpha\in\Gamma(G)$为$\alpha(v_1)=v_2$，$\alpha(v_2)=v_1$，而对所有$v\neq v_1$、$v_2$时，$\alpha(v)=v$。则$\alpha\neq i$而$\alpha'=i$。若$K_2$是$G$的一个支，取$K_2$的边为$x=v_1v_2$，和前面完全一样地定义$\alpha\in\Gamma(G)$得到$\alpha\neq i$而$\alpha'=i$。

充分性：假定G至多有一个孤立点且K_2不是G的一个支。若$\Gamma(G)$是平凡的，则显然$\Gamma_1(G)$使每一条边不动从而$\Gamma_1(G)$也是平凡的。于是假定存在$\alpha\in\Gamma(G)$使$\alpha(u)=v\neq u$，则u的度等于v的度。因为u和v不都是孤立的，所以这个度不是零。分如下二情况讨论：

1°）u邻接于v。令$x=uv$，因为K_2不是一个支，u和v的度都大于1。所以有一条边$y\neq x$关联于u，而$\alpha'(y)$关联于v。所以$\alpha'(y)\neq y$，即$\alpha'\neq i$。

2°）u不邻接于v。令x为任何一条关联于u的边。则$\alpha'(x)\neq x$，所以$\alpha'\neq i$。

（12）设G是二分图，试证：可把G的顶点加以适当排列，使G的邻接矩阵有如下形式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \text{其中}\mathbf{A}_{21}=\mathbf{A}'_{12}$$

证：设G的二分划为(X, Y)，其中$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, \cdots, y_m\}$，使G的顶点在邻接矩阵的行和列中排列次序为x_1，x_2，$\cdots$，x_n，y_1，$\cdots$，y_m即可得本题之结论。

（13）试证：若G是简单图，且A的特征值各不相同，则G的自同构群是Abel型的。

证：可用一个置换矩阵$P=[p_{ij}]$来表示$V(G)$的一个置换$\pi\in\Gamma(G)$，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}v_i=\pi(v_j); \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

易证$V(G)$的置换所对应的置换矩阵也构成群且与置换群$\Gamma(G)$同构。

又设$\pi\leftrightarrow P$，则$\pi\in\Gamma(G)\Longleftrightarrow \mathbf{PA}=\mathbf{AP}$。事实上，若令$v_m=\pi(v_i)$，$v_k=\pi(v_j)$，则

$$(\mathbf{PA})_{mj}=\Sigma P_{ms}a_{sj}=a_{ij},$$

$$(\mathbf{AP})_{mj}=\Sigma a_{ms}p_{sj}=a_{mk},$$

于是$\mathbf{PA}=\mathbf{AP}\Longleftrightarrow a_{ij}=a_{mk}$

$\Longleftrightarrow v_i$与v_j及v_m与v_k保持相同的邻接性

$\Longleftrightarrow \pi\in\Gamma(G)$。

设$\mathbf{x}$是$\mathbf{A}$属于特征值λ的一个特征向量，则$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$，对任意的$\mathbf{P}\leftrightarrow\pi\in\Gamma(G)$有$\mathbf{APx}=\mathbf{PAx}=\mathbf{P}\lambda\mathbf{x}=\lambda\mathbf{Px}$。

$\therefore$ $\mathbf{P}x$也是$\mathbf{A}$的属于特征值λ的特征向量。由于$\mathbf{A}$的特征值互异，故属于同一特征值的特征向量线性相关。

$\therefore \mathbf{P}x = \alpha x$，$\alpha$为实数，于是$\mathbf{P}^2 x = \mathbf{P}(\alpha x) = \alpha^2 x, \cdots, \mathbf{P}^k x = \alpha^k x$，…，因$\Gamma(G)$为有限群，故有整数$k$存在使得$\mathbf{P}^k = \mathbf{I}$，故$\mathbf{P}^k x = \alpha^k x = x$，即$\alpha^k = 1$，得到$\alpha = \pm 1$，进而$\mathbf{P}x = \pm x$，$\mathbf{P}^2 x = x$。

$\mathbf{P}^2 x = x$对每一特征向量均成立；但由于$\mathbf{A}$有互异的特征值，故有$\nu(G)$个线性无关的特征向量，组成ν-维空间的一组基，故任一ν-维向量可写成这ν个特征向量的线性组合。不妨设ν个特征向量为x_1，x_2，…，x_ν，任一向量$x = \sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i$。故有

$$\mathbf{P}^2 x = \mathbf{P}^2 \sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i = \Sigma a_i \mathbf{P}^2 x = \Sigma a_i x = x,$$

即$\mathbf{P}^2 x = x$对任意的ν-维向量均成立。由x的任意性知$\mathbf{P}^2 = I$，于是对任意的

$\mathbf{P}_1 \leftrightarrow \pi_1 \in \Gamma(G)$，$\mathbf{P}_2 \leftrightarrow \pi_2 \in \Gamma(G)$有

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \leftrightarrow \pi_1\pi_2 \in \Gamma(G),$$

故$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{I}$，即

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)^{-1} = \mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1}$$

又因$\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{I}$，$\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{I}$，所以

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1^{-1}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2^{-1},$$

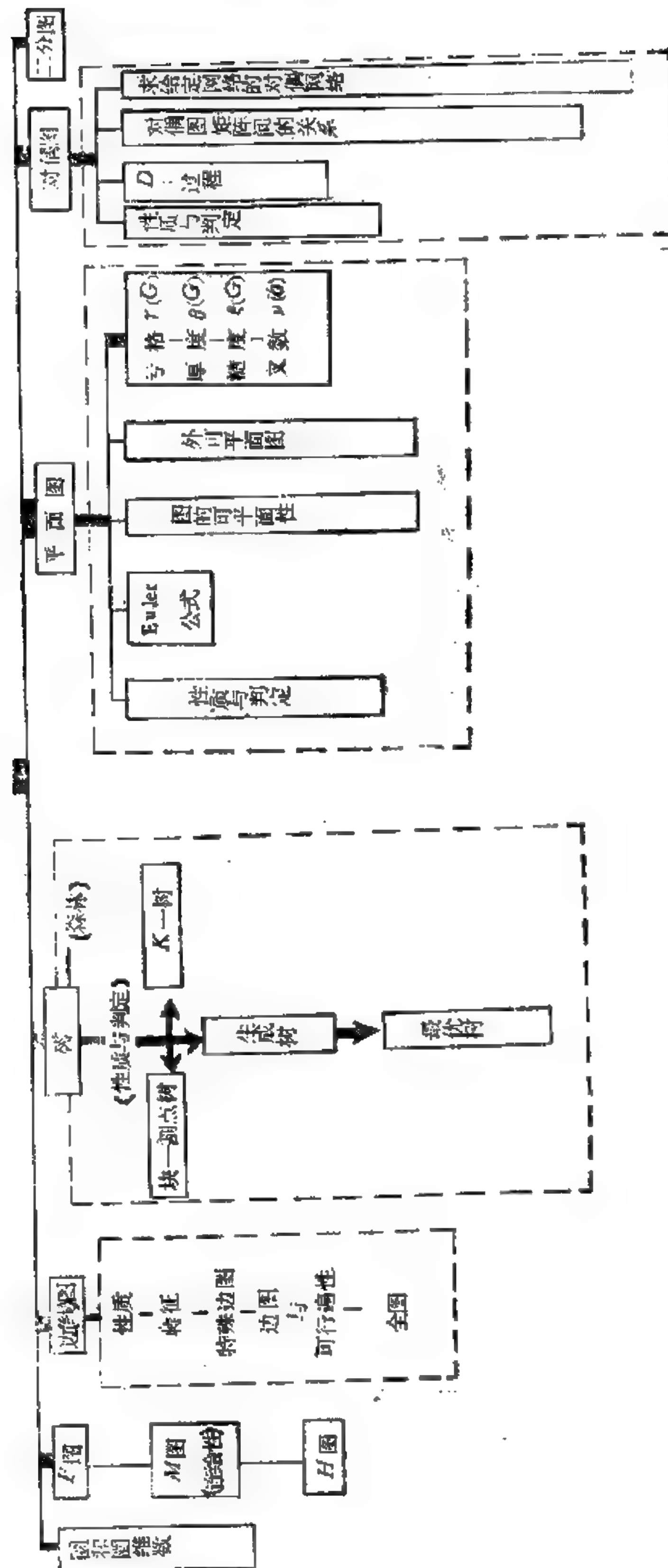
故

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1,$$

即与自同构群同构的置换矩阵是Abel型的，故$\Gamma(G)$也是Abel型的。

四、特殊图

(一)结　构



二分图
对偶图
D-过程
性质与判定
平面图
外可平面图
图的可平面性
Euler公式
性质与判定
树
生成树
最优树
K—树
(性质与判定)
边图
性质
特征
特殊边图
全图
L图
M图
H图

（二）概　念

1. 圈

（1）欧拉圈：自图的任一点出发，顺着图的边行进，每边必须经过一次且只许经过一次，最后再回到原出发点，称这样的图为欧拉圈。

（2）无环无向图 $G=(X,E)$ 上的闭路：设在无环无向图 $G=(X,E)$ 上给了一个边的序列

$Z=(\theta_1\theta_2, \theta_2\theta_3, \cdots, \theta_{n-1}\theta_n, \theta_n\theta_1)$，在此序列里，无重边，可能有重点，自 θ_1 循序列里边的顺序行进到 θ_n 再回到 θ_1，称为图 G 上的一个闭路。（图4.1）

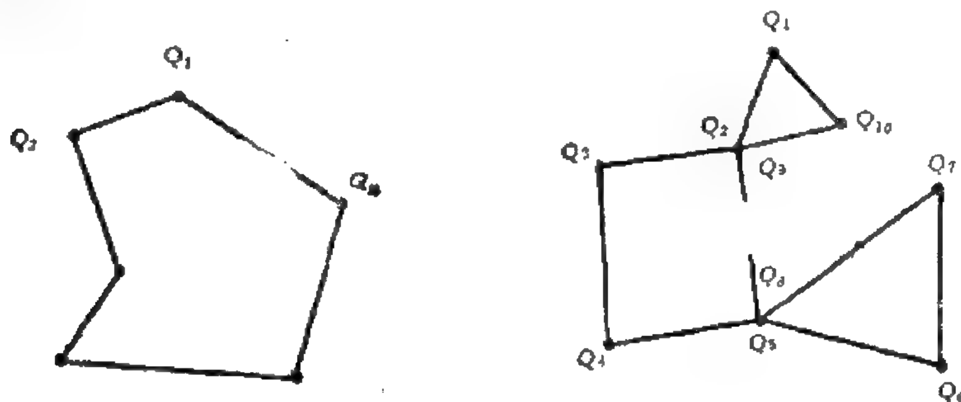


图4.1

（3）环和：设给定两个集合 A 与 B，取其在 A 或 B 中，但不同时在 A 与 B 中的元素作为集合 C，称 C 为 A 与 B 的环合，记作 $A \oplus B$。

（4）余圈：已给无向图 $G=(X,E)$，将其顶点集 X 任作一个分划 (X_1,X_2)，使 $X_1, X_2 \neq \phi$；$X_1 \cap X_2 = \phi$；$X_1 \cup X_2 = X$，图 G 的边，其一个顶点在 X_1 与另一个顶点在 X_2 内，所有这样的边构成边集 E 的一个子集，称为图 G 的余圈，记作 $\omega[X_1, X_2]$。

初级余圈：若有 A、$B \neq \phi$；A、$B \subset X$；$A \cup B = C$；$A \cap B = \phi$，其中 G_A 与 G_B 都是 G 的联接子图，G_C 是 G 的联接分子图，则 G 的边，其一个顶点在 A 内，另一个顶点在 B 内者构成边集 E 的一个子集合，称为图 G 的初级余圈。

广义圈：无向图 $G=(X,E)$ 的任一部分子图，它是若干个欧拉圈之合，称为广义圈。

（5）顶边结合的简化矩阵：无环联接图 $G=(X,E)$ 的顶边结合矩阵 M 是 $(n-1)$ 秩的，其每 $n-1$ 行都线性无关。在一般计算中，可以任意抹去一行，写成一个 $(n-1) \times m$ 型矩阵，称为顶边结合的简化矩阵，记作 M_R（这个矩阵的每一行表示该行所代表的那个顶点上的余圈，这些余圈构成图 G 余圈子空间的底）。

2. E图—M图—H图

（6）E 图：若一个图的每一个顶点的度均为偶数，则称此图为欧拉图或简称 E 图。

E 链：经过图的每一条边的链，称为欧拉链、或简称 E 链。

（7）M 图：若一个图只有两个顶点的度数为奇数，则称此图为 M 图。这两个度数为奇数

的顶点称为M图的端点。

(8) H通路：包含图的每个顶点的通路，称为Hamilton通路或H通路。

H回路：包含图的每个顶点的回路，称为Hamilton回路或H回路。

H图：若一图包含一条H回路，则称此图为Hamilton图或H图。

(9) 度序列：设v_1、v_2，…，v_n为n阶图G的n个顶点，记$d_i = d(v_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，称$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$为图G的度序列。

(10) 闭包：设G为一n阶图，若任一对顶点u，v满足$d(u)+d(v) \geqslant n$，且边$(u, v) \notin E(G)$，则将(u, v)加于图G，得图$G+(u, v)$；若反复加边直到无边可加为止，这样所得到的图称为图G的闭包，记作$\hat{G}$（图4.2）。

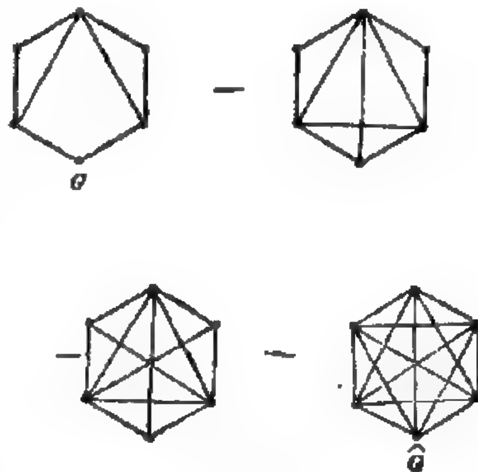


图4.2

(11) 令图G'的顶点集是三个互质的点集A、B、C之合，其中A是$k-g$个孤立点集$\bar{K}_{k-g}$，B是集团K_g的顶点集，C是集团K_{n-2k+g}的顶点集。将B的每个顶点联到$A \cup C$的每个顶点得图G'，其阶是n，其各顶点的次数为d_i：

$$
\begin{cases}
d_{G'}(a) = k & \text{当 } a \in A, \\
d_{G'}(b) = n-1 & \text{当 } b \in B, \\
d_{G'}(c) = n-k+g-1 & \text{当 } c \in C.
\end{cases}
$$

图G'称为原图G的统帅图。

(12) H—链：若存在一条链始于一个顶点而终于另一个顶点，且经过图的每个顶点一次且仅一次，则称此链为哈密尔顿链，简称为H—链。

H—联：一个无向图$G=(X, E)$，其任一对点（相邻或否）之间，总至少有一个H—链将其相联，则这样的图称为是哈密尔顿联接的，简记作H—联。

q-H-联：任给边集F，$|F| = q$，而(X, F)是若干个顶点互质的初级链，x、y是两个不同的初级链的顶点。若无向简单图G总有H-链包含F，取此二点做为它的起点和终点，则图G称为是q-H-联的。

q-H-联图类$\mathscr{H}(n, q)$：已给$n \geqslant 3$，$0 \leqslant q \leqslant n-2$，一组$n$阶简单无向图$G=(X, E)$，满足下二条件：

(1°) 在G内任取边集F，$|F| = q$，只须(X, F)是若干个是互质的初级链的合，则在G内存在H-圈，包含F；

(2°) 若$G \in \mathscr{H}(n, q)$，u、v二点不相邻，联u、v得新边$[u, v]$，加进图G得新图$G' = G+[u, v]$，则$G' \in \mathscr{H}(n, q)$

这些无向简单图G构成一个类，称为q-H-联图类，记作$\mathscr{H}(n, q)$。

(13) 哈密尔顿道路图：图G的哈密尔顿道路图$H(G)$是和G具有相同顶点集的图，并且其中任意两个顶点u和v是邻接的当且仅当G含有一条哈密顿u-v道路（即它含有G的每一个顶点）。

自哈密尔顿道路图：若$G \cong H(G)$，则称G是自哈密尔顿道路图。

(14) 哈密尔顿道路图序列的极限：设哈密尔顿道路图序列为

$$G, \ H(G), \ H^2(G), \ H^3(G), \ \cdots\cdots,$$

若存在一个正整数n，使得对于每一个正整数k，均有$H^{(k)}(G) \cong F$，则图F为此哈密尔顿道路图序列的极限。

(15) 弦加法的图：若图G的顶点可以标记成这样：(1°) $v_1, v_2, \cdots, v_p$，v_1是G中的一个哈密尔顿圈C；(2°) 对于每一个偶整数i ($2 \leqslant i \leqslant P$)，$\deg_G v_i = 2$；(3°) C含有弦（联结C中两个非相邻顶点的边）；(4°) $v_j v_k$是C中的弦，对于任意整数l意味着$v_{j+2l} v_{k+2l}$是C中的弦，这里的下标是以P为模的，则称G为弦加法的。

3．边（线）图

(16) 边图：将一图G的边的集X看作$V(G)$的2点子集的一个族，G的边图记作$L(G)$是交图$\Omega(X)$。（显然，$L(G)$的点是G的边，当G中相应的边邻接时，$L(G)$的两个点邻接）（图4.3）

迭边图：$L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$。

图G是边图：若它同构于某个图H的边图$L(H)$。

(17) 细分：若$e = uv$是G的一条边，又w不是G的一个点，则当用边uw和wv来代替e时，称e被细分。

细分图$S(G)$：若G的每一条边被细分，产生的图称为细分图，记作$S(G)$。（图4.4）

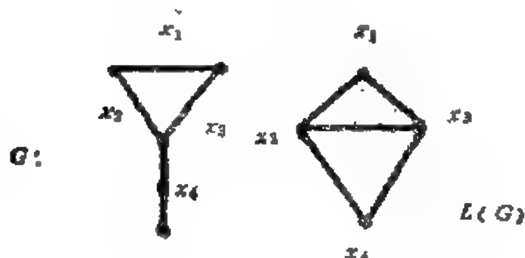


图4.3

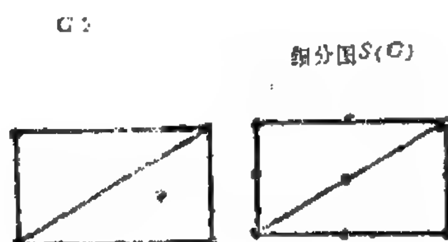


图4.4

$S_n(G)$：记在G的每条边中插进n个度为2的新点来得到的图（显然，$S(G) = S_1(G)$）。

$$L_n(G) = L(S_{n-1}(G)) \ (\text{一般地，} L_n(G) \neq L^n(G))。$$

(18) 邻元素：一个图的点和边都称为它的元素。一个图的两个元素若它们是关联的或邻接的，则称它们为邻元素。

全图$T(G)$：以$V(G) \cup X(G)$为点集，当$T(G)$的两个点在G中是邻元素时它们邻接（注：$X(G)$为G的边集）。

(19) 边Ramsey数$r_1(m, n)$：是满足下列条件的最小的正整数P。它使得每一个有P个点的连通图或者含有n条两两不邻接的边或者含有m条邻接在一点的边，即星形图$K_{1,m}$。（即$r_1(m, n)$是使得任何一个有P个点的图G，$L(G)$含有K_n或$\overline{L(G)}$含有K的最小的

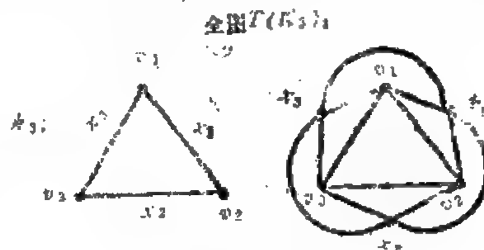


图4.5

正整数 P）.

4. 树

（20）星树：T_2的树枝共有一个顶点v_0。

边树：T_3的树枝实际上是一条路径.

（21）悬挂点：度数为1的顶点称为悬挂点.

悬挂边：悬挂点关联的那一条边称为悬挂边.

（22）离心率$e(v)$：一个连通图G中一个点v的离心率$e(v)$是对于G中的所有的u取的$\max d(u, v)$。

半径$r(G)$：是各个点中最小的离心率（最大的离心率是直径）.

中心点：若对于一个点v，$e(v)=r(G)$，则v是一个中心点.

中心：G的所有中心点的集是G的中心.

（23）分枝：一个树T在一个点u处的分枝是包含u作为一个端点的最大子树.

权：T的一个点u处的权是v处的任何一个分枝中边的最大数目.

（24）形心点：一个点v如果有最小的权，v称为是树T的形心点.

形心：T的形心由所有形心点组成.

（25）块—割点图：对于一个连通图G，它有块B_i和割点$\{C_j\}$，G的块—割点图,记作$bc(G)$定义为一个图，它有点集$\{B_i\}\cup\{C_j\}$，若两个点中一个对应于一个块B_i，另一个对于一个割点C_j，且C_j在B_i中，则这两个点邻接. 显然$bc(G)$是一个双图.（图4.6）

（26）K-树：连通图G中的一个K-树，是从（$K-1$）一树中去掉任何一个边而得到的子图. 表作$Ts_1, s_2, \cdots, s_K$.
（其中$s_1, s_2, \cdots, s_K$用来表示K-树中属于K个不同部分的节点集合）.

（27）连通顶点集合：对于一个连通图G，它的一个K-树将该图的顶点分为K个部分每个部分的全部顶点称为一个连通顶点集合，用K表示. 称这个K-树的各个连通顶点集合的总体为顶点分类集合，用$V_c\ K_K$示之.

（28）K-树组：对应于任一顶点分类集合的K-树的全体称为一个K-树组$T_c\ K_1, K_2, \cdots, K_K$，简记作$T_G(K_K)$.

（29）补树：若T_i是图G的一个树，它也是图G的一个子图，则它的补子图$\bar{T}_i$称为补树（或余树）.（图4.7）

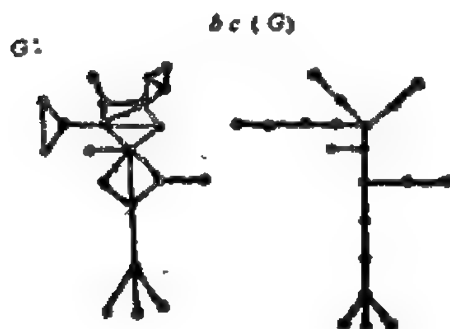


图4.6



图4.7

（30）树多项式：G的一个生成树的项是指它的边的积；G的树多项式定义为它的各个生成树的项的和。

5. 平面图

（31）G可嵌入平面：一个图G，若能把它画在平面上，且除端点外任意两条边均不相交，则称G可以嵌入平面。

G为可平面图：若图G可以嵌入平面，则称G为可平面图。

平面图：可平面图在平面上的一个嵌入称为一个平面图。

（32）面：设G是一个平面图，图的边所包围的一个区域，其内部既不含图的顶点，也不含图的边，这样的区域称为G的一个面。

约当（Jordan）曲线：在平面上一个封闭而本身没有交点的连续曲线。

边界：面的边界就是包围该面的诸边所构成的回路（即电路理论中所称的网孔）。

外（内）部面：平面图G的外部的无限区域当作一个面，称为外部面或无限面；余者称为内部面或有限面。

相邻的：若两个面的边界至少有一条公共边，则称两个面为相邻的，否则称为不相邻的。

（33）最大可平面图：设G为可平面图，若任二互不邻接的顶点u、v，使得$G+(u,v)$成为不可平面图，则称G是最大可平面图。（图4.9）

最大平面图：最大可平面图的一个平面嵌入称为最大平面图。

（34）同胚：若图G_1可由图G_2经过下列手续得到：移去边(v_1, v_2)，加上一个新的顶点v与v_1，v_2邻接，则称G_1与G_2同胚。（图4.10）

（35）关系"～"：设H是G的一个子图，在边集$E(G)-E(H)$中定义一个关系"～"：

（1°）若e_1，$e_2\in E(G)-E(H)$，e_1和e_2由一条不在$E(H)$中的边组成的链μ相连接，且e_1是μ的第一条边，e_2是μ的最后一条边；

（2°）μ的内部顶点不是H的顶点，则$e_1\sim e_2$（易证关系"～"是一个等价关系）。

（36）片：由关系"～"的一个等价类诱导出的$G-E(H)$的子图，称为G中H的片。

附着点：片与H的公共点称为片的附着点。

k-片：具有k个附着点的片，称为k-片。

等价k-片：具有相同附着点的两个k-片，称为等价k-片。

线段：$k\geqslant 2$的k-片附着点把回路C分成k个边不重的通路，每个通路称为B的线段。

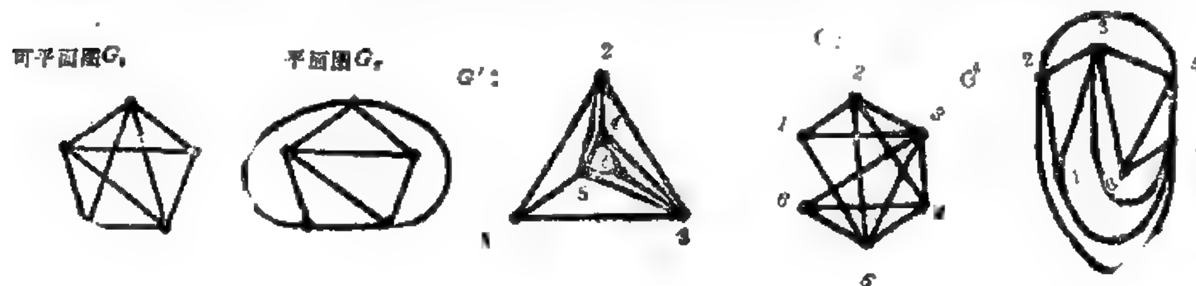


图4.8　　　　图4.9

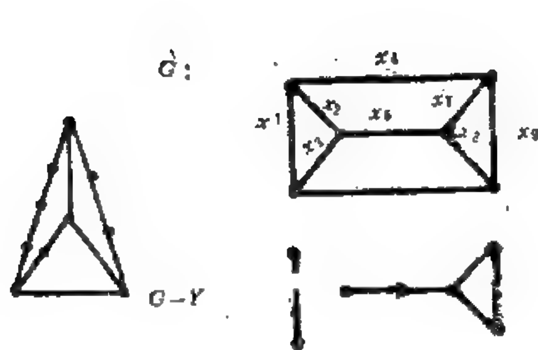


图4.10

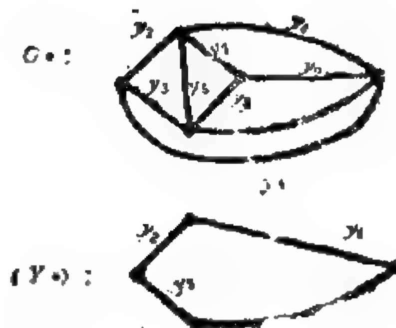


图4.11

重叠：若一个片的所有附着点位于另一片的某一线段中，则称这两每个片不重叠；否则称为重叠。

B和B'相间：若在回路C上存在四个不同的顶点u、v、u'、v'，使得u和v是片B的附着点，u'和v'是片B'的附着点，且这四个顶点以u、u'、v、v'的次序出现在C上，则称B和B'相间。

（37）初等收缩：一个图G的一个初等收缩由等同两个邻接的点u和v得到，即移去u和v，再加上一个新点w，使它邻接于所有邻接于u或v的点。

收缩：一个图可收缩到一个图H，若H可以从G通过一系列初等收缩得到。

（38）相对补图：G的一个子图H的相对补图$G-H$定义为去掉H的边得到的子图。

组合对偶：一个图G^*是图G的组合对偶，若在它们的边集之间有一个一一对应，使得不论如何选定边的对应子集Y和Y^*，总有

$$m^*(G-Y)=m^*(G)-m(\langle Y^*\rangle),$$

其中$\langle Y^*\rangle$是以Y^*为边集的G^*的子图。（图4.11）

（39）1-骨架：每个多面体联系着一个图，这个图只由它的顶点和它的边组成，称为它的1-骨架。

（40）外可平面的：若一个可平面图可以嵌入平面而使它的所有顶点在同一个面上，它就称为是外可平面的。（图4.12）

（41）边递增的回路矩阵$\mathbf{B}_{ei}$：将完全回路矩阵$\mathbf{B}_c$中各行重新排列，使各行的"1"的数目不少于前一行，则得到$\mathbf{B}_{ei}$。

边集矢量$\mathbf{E}$：是一个n维列矢量，n是边递增的回路矩阵$\mathbf{B}_{ei}$的行数。$\mathbf{E}$的第k个元素对应于$\mathbf{B}_{ei}$的第k行，其值为第k行中"1"的个数。

回路组合矢量$\mathbf{C}_k$：是一个n维行矢量，n是边递增的回路矩阵$\mathbf{B}_{ei}$的行数，其中$e-v+2$个元素是1，余者是0。每个回路组合矢量$\mathbf{C}_k$表示一个回路组合，$\mathbf{C}_k$中各元素1所对应的序号就是参加该回路组合的那些回路的序号。

本原回路组合矢量$\mathbf{C}_p$：回路组合矢量$\mathbf{C}_k$中，那些在相邻的"1"元素间夹有的"0"元素个数总数不超过一个的矢量，称为本原回路组合矢量$\mathbf{C}_p$。

（42）亏格$\gamma(G)$：是必须在球面上加上的柄的最少数目，以致使G可嵌入到此曲面上。

厚度$\theta(G)$：其并等于G的可平面子图的最少数目。

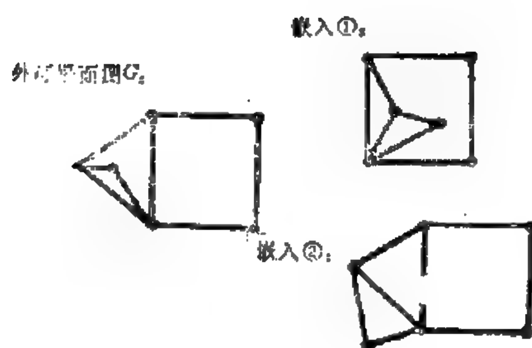


图4.12

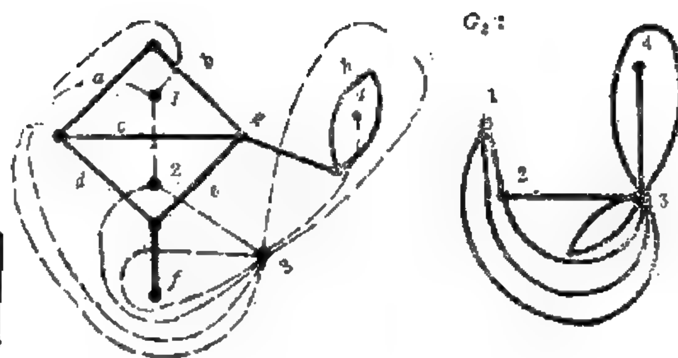


图4.13

榄度$\xi(G)$：G内边不相交的不可平面子图的最多数目．

叉数$\nu(G)$：是当将G画在平面上时相交的边对的最少数目．

6．对偶图

（43）边一一对应：若$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$边数相同，设$E_1=\{e_{11},e_{12},\cdots,e_{1n}\}$，$E_2=\{e_{21},e_{22},\cdots,e_{2n}\}$，令$e_{1i}\leftrightarrow e_{2i}$（$i=1,2,\cdots,n$），则称$G_1$和$G_2$是边一一对应的．

对应子图：设G_1和G_2是边一一对应的，g_1是G_1中由边e_{1j_1}，e_{1j_2}，$\cdots$，e_{1j_k}组成的子图，则G_2中由对应边e_{2j_1}，e_{2j_2}，$\cdots$，e_{2j_k}组成的子图g_2称为g_1的对应子图．

对偶图：若G_1和G_2的边存在一一对应，使得G_1的每个子图g_1有$n_1=R_2-\bar{r}_2$，则称G_2是G_1的对偶（这里n_1是子图g_1的零度，R_2是G_2的秩，$\bar{r}_2$是G_2中对应于g_1的子图g_2的补$\bar{g}_2$的秩）．

（44）D-过程：设平面图G有f个面（包括外部面）并设它们是S_i（$i=1,2,\cdots,f$），在G的每个面中放置一个顶点，令S_i中的顶点为v_i，若两个面S_i、S_j相邻，用边(v_i,v_j)连接v_i和v_j，使它与面S_i、S_j的公共边只相交一次，且与图的其它边界无公共点．这样得到一个有n_e条边（n_e是图G的边数）和f个顶点的图G'．这种从图G求得G'的过程称为D-过程．（图4.13）

7．二分图（偶图）

（45）行和向量：设（0，1）－矩阵是$m\times n$型，第i行上"1"的个数是p_i，则（p_1，p_2，$\cdots$，p_m）称为这个（0，1）—矩阵的行和向量．

列和向量：设其第j列上"1"的个数是g_j，则（g_1，g_2，$\cdots$，g_n）是其列和向量．

（46）最大矩阵：取$\mathbf{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，$\bar{\mathbf{S}}=(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\cdots\bar{s}_n)$分别为行和向量与列和向量的$m\times n$型（0，1）－矩阵．记作$\bar{\mathbf{A}}$．

（47）向量$\mathbf{S}$被向量$\mathbf{S}^*$所统帅：二向量$\mathbf{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$与$\mathbf{S}^*=(s_1^*,s_2^*,\cdots,s_n^*)$其元素都是非负整数，设下列条件能满足：

（1°）$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n$，$s_1^*\geqslant s_2^*\geqslant\cdots\geqslant s_n^*$；

（2°）$\sum\limits_{j=1}^{k}S_j\leqslant\sum\limits_{j=1}^{k}s_j^*$（$k=1,2,\cdots,n-1$），

$$\sum_{j=1}^{n} s_j = \sum_{j=1}^{n} s_j^*,$$

则称向量S被向量S*所统帅，记作$S \prec S^*$。

（48）径集：在二分图G＝（X，Y；E）中，我们可在顶点集$X \cup Y$里任取一组顶点$A \subset X \cup Y$，使用G中每一边至少有一顶点含在A内，这样一个顶点的集合称为径集。

（三）定　　理

1．圈

（1）已给图G＝（X，E），有限（含有限个顶点与有限条边）、无环、无孤立点）其每一顶点上的次数都为偶$\Longrightarrow$每个顶点在一个闭路上。

（2）已给图G＝（X，E），有限、无环、无孤立点，设在其上有二闭路Z_1＝（p_1，p_2，…p，p_1）与Z_2＝（θ_1，θ_2，…，θ_m，θ_1），若此二闭路有共同顶点θ_i'，无共同边$\longrightarrow$此二闭路可合并成一闭路。

（3）一个无环无向多重图G＝（X，E）是欧拉圈$\Longleftrightarrow$（i）图是联接的；（ii）其每个顶点的次数为偶。

（4）欧拉圈E是一个初级圈或是边互质（即彼此无公共边）的初级圈之合。

（5）无向图G＝（X，E）的任一圈是初级圈或者是若干个边互质的初级圈之合。

（6）有限的有向图G＝（X，U）是一个欧拉回路。

（7）无向图若干个初级圈的环和是一个圈。

（8）在无向图G＝（X，E）里，二余圈的环和是一余圈。

（9）任一余圈是边互质的初级余圈之和。

（10）无环图G＝（X，E）其所有的圈（包括广义圈）加上ϕ-圈构成一个向量子空间。

（11）无环图G＝（X，E），其所有的余圈加上ϕ-余圈构成一个向量子空间。

（12）圈空间的维数$\geqslant m-n+1$。

（13）无环联接图G＝（X，E），设T是其跨顶树，T_c是相应的余树、在T上任取一边e加进$T_c \Longrightarrow$部分图T_c+e中将含一个且仅一个初级余圈。

（14）设无环联接图G＝（X，E）的余圈子空间的维数记为$\mu(G) \Longrightarrow \mu(G) \geqslant n-1$。

（15）无环联接图G＝（X，E）上任一初级圈和任一初级余圈是相互正交的。

（16）无环联接图G的圈维数是$\nu(G)=m-n+1$，余圈维数是$\mu(G)=n-1$。

（17）无环联接图G＝（X，E），任取跨顶树T，其相应的余树设为$T_c \Longrightarrow$在T_c中每次取边e加进T，所得到的$m-n+1$个初级圈构成圈空间的一个基底。将T中每一边e加进余树T_c，所得到的$n-1$个初级余圈构成余圈空间的一个基底。

（18）无环图G＝（X，E）具n个顶点、m条边、p个联接的分子图$\Longrightarrow$圈维数是

$$\nu(G)=m-n+p.$$

（19）无环图G＝（X，E）具n个顶点、m条边、p个联接的分子图$\Longrightarrow$余圈维数

是

$$\mu(G) = n - p.$$

(20) 无环图 $G = (X, E)$ 共有 $2^{\nu(G)}$ 个圈，其中包含 ϕ-圈。图 G 共有 $2^{\mu(G)}$ 个余圈，其中包含 ϕ-余圈。

(21) 含 n 个顶点、$n-1$ 条边的无环图 $G = (X, E)$ 成树 $\Longleftrightarrow$ 其顶边结合矩阵的秩为 $n-1$。

(22) 含 n 个顶点、m 条边的无环联接图 $G = (X, E)$，其顶边结合矩阵 M 是 $n-1$ 秩的。其中任意 $n-1$ 个列相应的 $n-1$ 边构成一个跨顶树 $\Longleftrightarrow$ 这 $n-1$ 个列线性无关，亦即其相应的 $n-1$ 阶子行列式 $\neq 0$（模 2）。

(23) 无环联接图 $G = (X, E)$ 里跨顶树的个数，等于其简化的顶结合矩阵中其列线性无关的 $(n-1)$ 阶子行列式的个数。

(24) 在简化结合矩阵 $\overline{M}_R$ 中，任一 $(n-1)$ 阶子行列式 $\overline{D}_{n-1} = 0 \Longleftrightarrow$ 是其在 M_R 中相应的 $(n-1)$ 阶子行列式 $D_{n-1} \equiv 0$（模 2）。

(25) 无环联接有向图 $G = (X, U)$ 里，跨顶树的个数等于其简化结合矩阵 $\overline{M}_R$ 里异于 0 的 $(n-1)$ 阶子行列的个数。

(26) 无环联接图 $G = (X, E)$ 的跨顶树的个数等于 $|\overline{M}_R \cdot \overline{M}_R'|$，其中 $\overline{M}_R'$ 是 M_R 的转置矩阵。

(27) K_n 的跨顶树的个数是 n^{n-2}。

(28) 已给 n 个顶、$n-1$ 条边、无环的有向图 $G = (X, U)$，图 G 是以 x_1 为根的树形图（见后五（二）－(Ⅲ)）$\Longleftrightarrow \Delta_1 = 1$。此外 Δ_1 是如下形式的行列式：

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_G^-(x_2) & -a_3^2 & \cdots & -a_n^2 \\ -a_2^3 & d_G^-(x_3) & \cdots & -a_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_2^n & -a_3^n & \cdots & d_G^-(x_n) \end{vmatrix}$$

(29) (Tutte[1948]) 设 $G = (X, U)$ 是无环有向图 $\Longrightarrow \Delta_1$ 等于 G 里以 x_1 为根的树形图的个数。

(30) 任给无环联接图 $G = (X, E)$，n 个顶点、m 条边，作矩阵

$$B = (b_j^i) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中

$$b_j^i = \begin{cases} d_G(x_i), & \text{当 } i = j \text{ 时；} \\ -1, & \text{当 } i \neq j, [x_i, x_j] \in E \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } i \neq j, [x_i, x_j] \notin E \text{ 时。} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 图 G 中跨顶树的个数等于矩阵 B 里任一主子行列式的值。

2. E 图-M 图-H 图

(31) 闭链是 E 图。

(32) G 为连通 E 图 $\Longleftrightarrow G$ 中存在一条闭 E 链。

(33) E 图是环路。

(34) E_1 和 E_2 是图 G 的 E 子图 $\Longrightarrow E_1 \oplus E_2$ 也是 G 的 E 子图（可推广至 n 个的情形），

（35）P_1和P_2是一对顶点间的二条通路$\Longrightarrow P_1 \oplus P_2$是$E$图（可推广至$2K$个的情形）．

（36）设图$G=(X,\ E)$是联接的，则下述条件是等价的：

（1°）G是一个欧拉圈；

（2°）G的每一顶点其次数是偶数；

（3°）G的边集可以分划成初级圈．

（37）已给联接图$G=(X,\ E)$，设G只有两个奇次顶点a和b，其他的顶点都是偶次的$\Longrightarrow G$有一条开口的欧拉圈；自一个奇点出发，最终回到另一个奇点，经过每个顶点（当然可能不只一次），且经过每条边一次且仅一次．

（38）P是一条通路，G为一E图，且$P \oplus G$是M图时，在E图G中删去一边，则成为M图．

（39）图G具有E链$\Longleftrightarrow G$为一连通M图．

（40）一个M图或是一条通路或是一条通路和环路的边不重并．

（41）设M_1和M_2是有相同端点的M图$\Longrightarrow M_1 \oplus M_2$是$E$图．

（42）M为一M图，E为一E图$\Longrightarrow M \oplus E$是$M$图．

（43）$\{M_{ij}\}=\{P_0 \oplus E \mid P_0 \in \{P_{ij}\},\ E \in \{E\}\}$（此处，$\{P_{ij}\}$表示$G$中顶点$i$和$j$间所有通路之集合；$\{M_{ij}\}$表示$G$中$i$、$j$间所有$M$图的集合；$\{E\}$表示所有$E$图和空集的集合）．

（44）图G是可连绘的$\Longleftrightarrow G$是连通E图或是连通M图．

（45）附表：

⊕	E	M
E	E	M
M	M	E

H图之性质一必要条件

（46）G是H图$\Longrightarrow$对于V的每个非空真子集S，导出子图$G-S$的分支数目$P(G-S)$均满足$P(G-S) \leq |S|$．

（47）每一个H图是2-连通的；每一个非H图之2-连通图有一个θ子图．

（48）每一个三次H图有至少三个生成圈．

H图之空一充分条件

（49）（Dirac定理）G是n（$\geqslant 3$）阶简单图，ω是最小度数的顶点，$d(\omega) \geqslant \frac{n}{2}$ $\Longrightarrow G$是H图．

（50）G是一个具有度系列$(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n)$的简单图，这里$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$，且$n \geqslant 3$，若不存在小于$\frac{n}{2}$的$m$值，使得$d_m \leqslant m$，$d_{n-m} < n-m \Longrightarrow G$是$H$图．

（51）图G有$P \geqslant 3$个点．若对每一个n，$1 \leqslant n < (P-1)/2$，度不超过n的点的数目少于n，且若对奇的P，度至多等于$(P-1)/2$的点的数目不超过$(P-1)/2$ $\Longrightarrow G$是H的．

（52）每一个2-连通图的平方是H图．

(53) $p\geqslant 3$，且对于每一对不邻接的点 u 和 v，$\deg u+\deg v\geqslant p \longrightarrow G$ 是 H 的。

(54) 设简单图 $G=(X, E)$ 是 n 阶的，将其各顶点按次数的大小排列成 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，设 q 是一个整数，$0\leqslant q\leqslant n-3$，若对每一个整数 k：$q<k<\frac{1}{2}(n+g)$，下关系成立

$$d_{k-q}\leqslant k \Longrightarrow d_{n-k}\geqslant n-k+q,$$

$\Longrightarrow$ 对每一个边集 F，$|F|=q$，且部分图 (X, F) 的联接分子图都是初级链，都存在 G 的一个 H 图，包含 F。

(55) (chvotal[1971]) 已给简单联接图 G，其阶 $n\geqslant 3$，将其顶点编号，使各顶点的次数成数列 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，若 $d_k\leqslant k<n/2 \longrightarrow d_{n-k}\geqslant n-k \longrightarrow$ 在图 G 内，存在 H-圈。

(56) 设在 G 内，根本不存在 $k<\frac{n}{2}$，使 $d_k\leqslant k \Longrightarrow G$ 是 H-型的。

(57) 设图 $G=(X, E)$ 是简单的，$|X|=n$，$|E|=m$，若 $m>\binom{n-1}{2}+1 \Longrightarrow$ 图 G 含 H-圈，且 n 阶，具 $\binom{n-1}{2}+1$ 条边的非 H-型简单图，仅有 C_1，n 与 $n=5$ 时的 $C_{2,n}$，其中 $C_{1,n}$ 是所谓的统帅图。

(58) (Dirac[1952]) 设联接的简单图 $G=(X, E)$ 阶 $n\geqslant 3$，且其极小次数 $\delta\geqslant n/2 \Longrightarrow G$ 是 H-型的。

(59) (Ore[1961]) 设联接的简单图 $G=(X, E)$ 的阶 $n\geqslant 3$，且 $d_G(x)+d_G(y)<n \Longrightarrow [xy]\in E \longrightarrow G$ 是 H-型的。

(60) 闭包图 $\hat{G}$ 是完全的 $\Longrightarrow G$ 是 H-型的。

(61) 类 $\mathscr{H}(n, g)$ 中每个无向简单图 G 是 $(g-1)$—H—联的。

(62) 设 $G=(X, E)$ 是一个阶 $n\geqslant 3$ 的无向简单图，将顶点按次数的递升序列编号，$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，其中 d_i 满足条件：

$$d_{k-1}<k\ (2\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}) \Longrightarrow d_{n-k}\geqslant n-k+1$$

$\Longrightarrow$ 图 G 是 H-联的。

(63) (Erdös, Gallai, [1959]) 设 $G=(X, E)$ 是个阶 $n\geqslant 3$ 的无向的简单图，在这个图上，任二相异非邻点 x 与 y 的次数，满足条件

$d_G(x)+d_G(y)>n$

$\longrightarrow G$ 是 H-联的。

(64) (Ore, [1963]) 设 G 是一个阶 $n\geqslant 3$ 的无向简单图，具 m 条边，且 $m\geqslant\binom{n-1}{2}+3 \Longrightarrow G$ 是 H-联的。

充要条件

(65) u、v 是 n 阶图 G 中两个不邻接的顶点，$d(u)+d(v)\geqslant n$，$G+uv$ 为 H 图 $\Longleftrightarrow G$ 为 H 图。

(66) 图的闭包是唯一的。

(Bondy) 一个简单图 G 的闭包是 H 图 $\Longleftrightarrow G$ 是 H 图。

(67) G是完全n-部图，G是H的$\Longleftrightarrow p \leqslant 2\alpha_0$（$\alpha_0$是点覆盖数）.

(68) 连通图G是H的$\Longleftrightarrow G$的关联矩阵存在一个主子矩阵，使其任一$(n-1)$阶子矩阵均为非奇异的.

(69) 图G是哈密尔顿道路图$\Longleftrightarrow G$是哈密尔道路图序列的极限.

(70) 每个弦加法的图都是自哈密尔顿道路图.

(71) 设G是一个p（$\geqslant 4$）阶的哈密尔顿、自哈密尔顿道路图，它具有哈密尔顿圈C：v_1, v_2, $\cdots$, v_p, v_1和弦v_1v_m, v_2v_{m+1}, 这里$2 < m < p \Longrightarrow$ (1°) G含有所有形如$v_i v_{m+i-1}$的弦，这里$i = 1, 2, \cdots, p$，并且这里所有的下标是以p为模的；(2°) 若$m \geqslant 5$，G含有一个长度为$m-2$的外圈.

(72) 设G是一个p（$\geqslant 3$）阶的哈密尔顿道路图，G是一个自哈密尔顿道路图$\Longleftrightarrow G$是弦加法的或者G同构于K_p、C_p、$K\left(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p\right)$ 或$K_{p/2}+\overline{K}_{p/2}$，最后两个中的$p$为偶数.

3. 边（线）图（$L(G)$）

【性质】

(73) G是一个(p, q)图，它的各个点的度是$d_i \Longrightarrow L(G)$中有q个点和q_L条边，其中$q_L = -q + \frac{1}{2}\sum d_i^2$.

(74) 一连通图同构于它的边图$\Longleftrightarrow$它是一个圈.

(75) 令G和G'是有同构的边图的连通图，除了一个K_3而另一个是$K_{1,3}$外，G和G'同构.

【特征】

(76) G是一个边图$\Longleftrightarrow G$的边可以划分为完全子图，且使得没有一个点在两个以上的子图中$\Longleftrightarrow G$不以$K_{1,3}$为一个导出子图，又若两个奇三角形有一条公共边，则它们的各个点的导出子图是K_4.

【特殊边图】

(77) 一个图是一个树的边图$\Longleftrightarrow G$是一个连通的块图，其中每个割点恰在两个块中.

(78) 除$p = 8$外，一个图G是K_p的边图$\Longleftrightarrow$

(1°) G有$\binom{p}{2}$个点；

(2°) G是$2(p-2)$度正则的；

(3°) 每两个不邻接的点恰与四个共同邻接；

(4°) 每两个邻接的点与$p-2$个点共同邻接.

(79) 除$m = n = 4$外，一个图G是$K_{m,n}$的边图$\Longleftrightarrow$

(1°) G有mn个点；

(2°) G是$m+n-2$度正则的；

(3°) 每两个不邻接的点恰与两个点共同邻接；

(4°) 在邻接的点对中，恰有$n\binom{m}{2}$对恰与$m-2$个点共同邻接，其余$m\binom{n}{2}$对恰与$n-2$个点共同邻接.

【边图与可行遍性】

(80) G是E的$\Longrightarrow L(G)$既E的又H的.

(81) G是H的$\Longrightarrow L_2(G)$是H的；

$L_2(G)$是H的$\longrightarrow L(G)$是H的。

(82) $L(G)$是H的$\Longleftrightarrow G$中有一闭迹，对于G的每一条边，它含有邻接于这条边的至少一点。

(83) $L_2(G)$是H的$\Longleftrightarrow G$中有一闭的生成迹。

(84) $L_3(G)$是H的$\Longleftrightarrow G$是E的。

(85) G是有p个点的一个非平凡的连通图，但它不是一条道路$\Longrightarrow$对所有$n\geqslant p-3$，$L^n(G)$是H的。

【全图】

(86) 全图$T(G)\cong$细分图$S(G)$的平方。

(87) v是G的一个点$\Longrightarrow$点v在$T(G)$中的度为$2\deg v$；

$e=uv$是G的一条边$\Longrightarrow$边e在$T(G)$中的度为$\deg u+\deg v$。

(88) G是一个(p, q)图，它的各点的度为$d_i\Longrightarrow$全图$T(G)$有$p_T=p+q$个点和$q_T=2q+\frac{1}{2}\Sigma d_i^2$条边。

(89) 对$n>1$，总有$r_1(2, n)=3$，对所有其余的m和$n\Longrightarrow r_1(m, n)=(m-1)(n-1)+2$。

4. 树

【性质与判定】

(90) G是一个树$\Longleftrightarrow G$之任意二点由唯一通路联结$\Longleftrightarrow G$是连通的，且$p=q+1$ $\Longleftrightarrow G$是无圈的，且$p=q+1\Longleftrightarrow G$是无圈的，且若$G$的任何两个不邻接的点联以一条边$e$，则$G+e$恰有一个圈$\Longleftrightarrow G$不是$K_3\cup K_1$或$K_3\cup K_2$，$p=q+1$，且若$G$的任何两个不邻接的点联以一条边$e$则$G+e$恰有一个圈$\Longleftrightarrow G$是连通的，对$p\geqslant 3$不是$K_p$，且若$G$的任何两个不邻接的点联以一条边$e$，则$G+e$恰有一个圈$\Longleftrightarrow G$连通，且其每一边均为割边。

(91) G是一个树$\Longrightarrow$至少存在两个悬挂点。

G是一个树$\Longrightarrow$树中所有非悬挂点均为割点。

(92) 每一个树有一个由一个点或两个邻接的点组成的中心。

(93) 每一个树有一个由一个或两个邻接的点组成的形心。

【块—割点树】

(94) 一个图G是某个图H的块—割点图$\Longleftrightarrow$它是一个树，且在它的任何两端之间的距离是偶数。

【K-树】

(95) 设G_S与G_S'为v个顶点的连通图G的两个互补的子图，且都含有G的全部v个顶点。若由i-树组T_{G_S} K_i形成G中一个K-树组$\Longleftrightarrow$使它与G中一个$(k+v-i)$-树组$T_{G_S'}$ K_{k+v-i}相结合，且在V K_i与V K_{k+v-i}中任二连通顶点集不能有一个以上的相同顶点。这里$V(K_i)$与V K_{k+v-i}分别是其对应的顶点分类集合。

【生成树—最优树】

(96) 任给无环、无孤立顶点的图$G=(X, E)\Longrightarrow G$恒有生成树（或生成林），且$n_e\geqslant n_v-p$（$p$为连通分支数）。

(97) T是连通图G的一个生成树$\Longleftrightarrow T$是G的有n_v-1条边的生成子图.

(98) 图G有生成树$\Longleftrightarrow G$连通.

(99) G为连通图$\Longrightarrow n_e \geqslant n_v - 1$.

(100)（变元矩阵-树定理）矩阵M_x的任何一个余因子的值是G的树多项式.

(101)[附]生成树的构造方法:

①避圈法;

②破圈法（也可求最优树）;

③Kruskal算法

④基本树变换法（对有向图）;

⑤树多项式法.

5. 平面图

【平面图与可平面图】

(102) G是可平面的$\Longleftrightarrow$它的每个分支是可平面的$\Longleftrightarrow$它的每个最大不可分子图是可平面的$\Longleftrightarrow$它可嵌入球面.

(103) 平面图任一内部面$\xrightarrow{\text{通过测地投影}}$外部面.

(104) 最大平面图的任何一个面都是三角形K_3.

(105) $n \geqslant 4$的最大平面图G, $\delta(G) \geqslant 3$, 其中$\delta(G)$表示图G的顶点的最小度数.

(106) G是一个(p, q)最大平面图$\Longrightarrow q = 3p-6$;

G是一个(p, q)平面图, 且其中每个面都是一个4-圈$\Longrightarrow q = 2p-4$.

(107) G是任何一个可平面的(p, q)图, $p \geqslant 3 \Longrightarrow q \leqslant 3p-6$;

G是2-连通的且没有三角形$\Longrightarrow q \leqslant 2p-4$.

(108) 每一个有$p \geqslant 4$个点的最大可平面图是3-连通的.

(109) 每个2-连通平面图可以嵌入平面, 使任何一个特定的面成为外部面.

(110) 每一个可平面可以嵌入平面, 使一条予定的边成为外部区域的一条边.

(111)每个3-连通可平面图可以唯一地嵌入球面.

(112) 每个可平面图同构于一个平面图, 它所有的边都是直线段.

(113) (Gringberg[1968]) 设简单联接图$G=(X, E)$是平面的, 并设G有H-圈C $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(i-2)(\varphi_i'-\varphi_i'')=0$, 其中$\varphi_i'$与$\varphi_i''$分别是$H$-圈$C$内部与外部所含$i$级面的个数。

【Euler公式】

(114)设G是一个有n_v个顶点、n_e条边和f个面的连通平面图$\Longrightarrow n_v + f - n_e = 2$.(对于凸多面体: $V+F-E=2$).

(115)任一平面图, 包含n个顶点, m条边, f个面, p个联接的分子图, $\Longrightarrow n - m + f = p + 1$.

(116) 平面图$G=(V, E)$的每个面的边界都是为n的回路$\Longrightarrow n_e = \dfrac{n(n_v-2)}{n-2}$

(117) G是平面图$(n_v \geqslant 3) \Longrightarrow n_e \leqslant 3n_v - 6$;

(118)平面图G中不含$K_3 \Longrightarrow n_e \leqslant 2n_v - 4$.

(119) 每一个$p \geqslant 4$的可平面图G, 至少有四个点的度不超过5.

(120)K_5是不可平面的。

(121)$K_{3,3}$是不可平面的。

【图的可平面性】

(122) 两片重叠⟹或它们相同，或是等价3-片。

(123) 若片B有三个附着点v_1、v_2和v_3⟹在$V(B)-V(C)$中存在一个顶点v_0，且在B中有三条分别连接v_0和v_1、v_2、v_3的通路P_1、P_2、P_3，使当$i\neq j$时，P_i和P_j只有顶点v_0是公共的。

(124)与每一个外片均不重叠的内片是可转移的。

(125) 内（外）片重叠

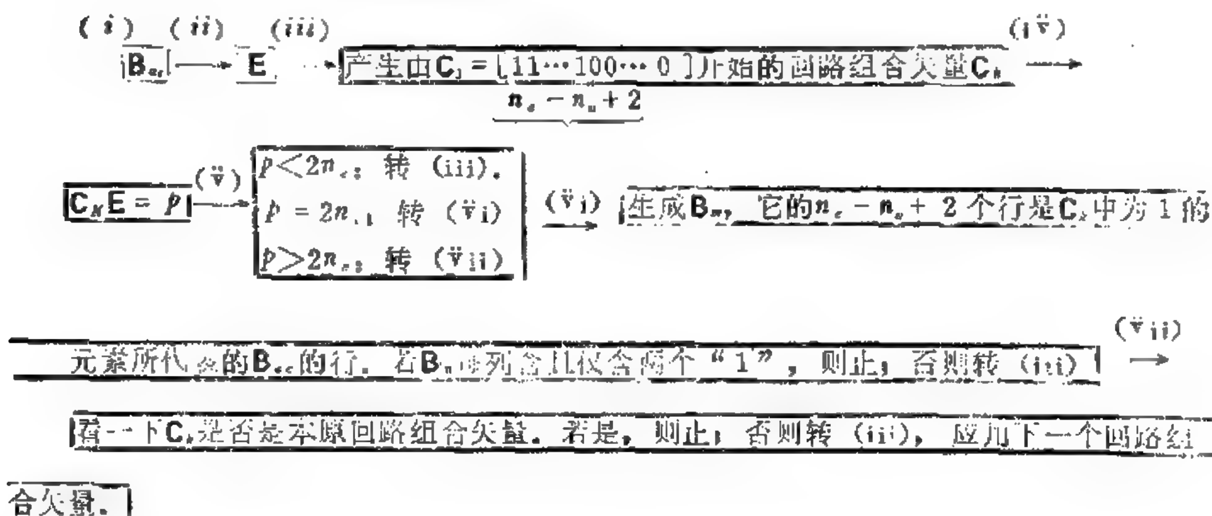
(126)（Kuratowski定理）一个图G是可平面的⟺它不含同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。

(127) 一个图G是可平面的⟺每一个块是可平面的⟺没有一个可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图⟺它有一个组合对偶⟺G的每一个至少有三个点的块有一个圈基Z_1、Z_2、…，Z_m和另外一个圈Z_0，使每一条边出现在这$m+1$个圈的正好二个之中。

(128) 一个图是凸3维多面体的1-骨架⟺它是可平面的和3-连通的。

(129)给定n_e条边、n_v个顶点的不可分连通图G，它是可平面的⟺它的完全回路矩阵B_c包含一个n_e-n_v+2行、n_e列子矩阵B_m，使B_m之每一列正好含有两个“1”。

(130)[附]判定可平面图的步骤：



【外可平面图】

(131)一个图G是外可平面的⟺它的每一个块是外可平面的。

(132)令G是一个最大外平面图，有$p\geq3$个均在外部面上的顶点⟶G有$p-2$个内部面。

(133)每一个在p个点的最大外可平面图G有a)．$2p-3$条边；b)．至少有3个点的度不超过3；c)．至少2个点的度等于2；d)．$\kappa(G)=2$．

(134)除等同两个圈的各一条边得到的图外，一个图是外可平面图的⟺它没有同胚于K_4或$K_{2,3}$的子图。

(135)每一个至少有9个点的可平面图的补图是不可平面的，而9是这种数目中最小的一个。

(136) 每一个至少有 7 个点的外可平面图的补图不是外可平面的，而 7 是这种数目中最小的一个.

【拓扑不变量】

亏格$\gamma(G)$：

(137) $V - E + F = 2 - 2\gamma$.

(138) G 是一个有亏格γ的连通图

$$\Longrightarrow \begin{cases} q = 3(p - 2 + 2\gamma) & \text{(每个面皆为三角形)}; \\ q = 2(p - 2 + 2\gamma) & \text{(每个面皆为四边形)}; \\ \gamma \geqslant \frac{1}{6}q - \frac{1}{2}(p - 2); & \\ \gamma \geqslant \frac{1}{4}q - \frac{1}{2}(p - 2) & \text{(}G\text{ 无三角形)}. \end{cases}$$

(139) $\gamma(K_p) = \left\{ \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\}$.

(140) $\gamma(K_{m,n}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\}$.

(141) 方体$\gamma(\theta_n) = 1 + (n-4)2^{n-3}$.

(142) G 有块B_1、B_2、…、$B_n \Longrightarrow \gamma(G) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(B_i)$.

(143) 令一个n-连通图G是两个$(n+1)$-支B和C的并，令v_1、…、v_n是$B \cap C$的点的集. 将边v_iv_j加入G，称得到的图为G_{ij}. 当$1 \leqslant i < j \leqslant n$时，$\gamma(G_{ij}) = \gamma(G) + 1 \Longrightarrow \gamma(G) = \gamma(B) + \gamma(C) + n - 1$.

厚度$\theta(G)$：

(144) $\theta(G) \geqslant \left\{ \frac{q}{3p-6} \right\}$

(145) $\theta(K_p) \geqslant \left\lceil \frac{p+7}{6} \right\rceil$ (当 $p \not\equiv 4 \pmod 6$，除了 $p = 6$，$\theta(K_p)\left\lceil \frac{p-7}{6} \right\rceil$).

(146) $\theta(K_{m,n}) = \left\{ \frac{mn}{2(m+n-2)} \right\}$ (但可能除了 $m < n$，mn为奇数，而且存在一个整数K，使$n = [2K(m-2)/(m-2K)]$时除外).

$\theta(K_{4,n}) = [(n+5)/4]$.

(147) 方体$\theta(\theta_n) = \left\{ \frac{n+1}{4} \right\}$.

粗度$\xi(G)$：

(148) $$\xi(K_{3n}) = \begin{cases} \binom{n}{2} & (p = 3n \leqslant 15), \\ \binom{n}{2} + \left[\frac{n}{5}\right] & (p = 3n \geqslant 30); \end{cases}$$

$\xi(K_{3n+1}) = \binom{n}{2} + 2\left[\frac{n}{3}\right]$ ($p = 3n + 1 \geqslant 19$和$p \neq 9\gamma + 7$)；

$$\xi(k_{3,n,3})=\binom{n}{2}+\left[\frac{14n+1}{15}\right].$$

(149) $\xi(k_{2,(3r+d),(3s+e)})=rs+\min\left(\left[\frac{er}{3}\right],\left[\frac{ds}{3}\right]\right)$, （对 $d=0$ 或 1 和 $e=0$ 或 1）；

$\xi(k_{2,r+2,3s})=rs+[\frac{s}{3}]$，当 $r\geqslant 1$ 时；

$$\xi(k_{3,r+2,3s+1})\begin{cases}\leqslant rs+\min\left(\left[\frac{r+s}{3}\right],\left[\frac{2s}{3}\right],\left[\frac{8r+16s+2}{39}\right]\right),\\ \geqslant rs+\max\left(\left[\frac{s+2}{3}\right],\min\left(\left[\frac{r}{3}\right],\left[\frac{2s}{3}\right]\right)\right),\end{cases}$$

对 $r\geqslant 2$，$s\geqslant 7$。

（这两式当 $r\geqslant 2s$ 时相等）。

$$\xi(k_{3,r+2,3s+2})\begin{cases}\leqslant rs+\min\left(\left[\frac{r+2s}{3}\right],\left[\frac{2r+s}{3}\right],\left[\frac{16r+16s+4}{39}\right]\right),\\ \geqslant rs+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{s}{3}\right]+\left[\frac{r}{9}\right],\ 对\ 1\leqslant r\leqslant s.\end{cases}$$

【叉数 $\nu(G)$】

(150) $\nu(G)=0\Longleftrightarrow G$ 是可平面的。

(151) $\nu(K_p)\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{p}{2}\right]\left[\frac{p-1}{2}\right]\left[\frac{p-2}{2}\right]\left[\frac{p-3}{2}\right]$. （$p\leqslant 10$ 时是等式）。

(152) $\nu(K_{m,n})\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$. （$m\leqslant 6$ 时是等式）。

6. 对偶图

(153) G_2 是 G_1 的对偶 $\Longrightarrow\begin{cases}N_1=R_2,\ R_1=N_2;\\ G_1\text{也是}G_2\text{的对偶.}\end{cases}$

(154) C 是 G 中一 n 回路 $\Longrightarrow$ 收缩 C 的一些边（不是全部）不会改变图的零度，而收缩 C 的全部边，图的零度少 1。

(155) G 与 G' 对偶。令 e 是 G 中一边，e' 是 G' 中对应的边。G_e 是 G 收缩边 e 所得到的图，G'_e 是 G' 删去 e' 所得到的图 $\Longrightarrow G_e$ 和 G'_e 对偶。

(156) G 与 G' 对偶 $\Longrightarrow G$ 中的回路对应于 G' 之割集。

(157) G 是一偶图 $\Longleftrightarrow G$ 的所有回路都有偶数长度。

(158) G 有对偶图 $\Longleftrightarrow G$ 为可平面的

(159) 平面图 $G_1\xrightarrow{D过程}G_2\Longrightarrow G_2$ 是连通的。

(160) $G_1\xrightarrow{D过程}G_2$；$C=e_{i1}e_{i2}\cdots e_{ir}$ 是 G_1 中的一条回路；$e'_{i1}e'_{i2}\cdots e'_{ir}$ 是 G_2 中与 $e_{i1}e_{i2}\cdots e_{ir}$ 对应的边 $\Longrightarrow\{e'_{i1},e'_{i2},\cdots,e'_{ir}\}$ 是 G_2 的一个割集。

(161) $G_1\xrightarrow{D过程}G_2$；$S=\{e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{jk}\}$ 是 G_1 的一个割集 $\Longrightarrow G_2$ 中的对应边 e'_j，

e'_{i1}, …, e'_{in}组成G_2中的一条回路。

(162) $G_1 \xrightarrow{D过程} G_2 \Longrightarrow N_1 = R_2$, $R_1 = N_2$。

(163) 平面图$G_1 \xrightarrow[小]{D过程}$平面图$G_2 \Longrightarrow G_2$是G_1的对偶。

(164) 平面图G_1的完全割集矩阵为Q_{c1}，它的对偶图G_2的完全回路矩阵为$B_{e2} \Longrightarrow Q_{c1} \leftrightarrow B_{e2}$；同理，$B_{e1} \leftrightarrow Q_{c2}$。

(165) 平面图G_1的回路矩阵之子矩阵为B_{n1}，它的对偶图G_2的关联矩阵的子矩阵为A_2 $\Longrightarrow B_{n1} \leftrightarrow A_2$；同理，$A_1 \leftrightarrow B_{n2}$。

(166) 一个平面图可以有多于一个的对偶图。

(167) G的每个初级圈对应于其偶图G^*的一个初级余圈；反之亦然。

(168) 附：求给定网络的对偶网络。

沿下列程序进行："网络$N \rightarrow$有向图$G_d \rightarrow B_{n1} = A_2 \rightarrow$ 对偶图$G_d^* \rightarrow$对偶网络N^*"。可将之编制一较好的程序，利用电子计算机去求解。

7. 二分图(偶图)

(169) 无向图$G = (X, E)$是二分的$\Longleftrightarrow$图G不含奇圈。

(170) 设$\mathbf{R} = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$，$\mathbf{S} = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$是二向量，其元素都是非负整数。用$\mathbf{R}$为行和向量作矩阵$\bar{\mathbf{A}}$（最大矩阵），令其列和向量为$\bar{\mathbf{S}} \Longrightarrow$存在矩阵$\mathbf{A}$取$\mathbf{R}$为其行和向量，$\mathbf{S}$为其列和向量的充要条件是

$$\mathbf{S} \prec \bar{\mathbf{S}}.$$

(171) 已给二数列$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_m$与$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n$，存在简单的二分图$G = (X, Y; E)$，其中$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，使有

$$d_G(x_i) = r_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$
$$d_G(y_j) = s_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i \geqslant 1}^{k} r_i^* \geqslant \sum_{j=1}^{k} s_j \ (k = 1, 2, \cdots, n-1),$$
$$\sum_{i \geqslant 1} r_i^* = \sum_{j=1}^{n} s_j.$$

(172) (König, Egerváry, [1931]) 在(0, 1)-矩阵$\mathbf{A}$里不同列不同行的"1"的极大个数ρ等于包含矩阵里所有的"1"的极小线数ρ'。(注：两分图$G = (X, Y; E)$的顶点对应于邻接矩阵里的行和列统称为线)。

(173) 在两分图$G = (X, Y; E)$里，极大并列集的维，等于其极小径集的维。

(四) 题　解

1. 图

(1) 证明定理：已给图$G = (X, E)$，有限（含有限个顶点与有限条边）、无环、无孤立点，其每一顶点上的次数都为偶，则其每个顶点，必在一个闭路上。

证：设Q_1是图G的一个顶点，在Q_1有边Q_1Q_2，因Q_2的次数为偶，故还有边Q_2Q_3，异于Q_1Q_2，自Q_3可再引边Q_3Q_4，…，一直到点Q_n，若$Q_n \equiv Q_1$，则本题已证；否则，由于图是有限的，这样引边，不可能无限地引伸下去，必到某个地步停止下来，若停止在某个异于Q_1的任一顶点上，图中将出现奇次顶点，引出矛盾，故最后必停止在Q_1，得一闭路。

（2）证明定理：无向图若干个初级圈的环和是一个圈。

证：①就两个初级圈而言，若此二圈边互质，则因二初级圈或有公共顶点，或无公共顶点，在前一情形下，公共顶点上的次数都是4；在后一情形下，每个顶点上的次数是2，故此二者的环和，其每个顶点的次数都是非0偶数。根据定理：一个无环无向多重图$G=(X, E)$是欧拉圈的充要条件是：图是联接的且其每个顶点的次数为偶，可知这个环和是一个圈。

若二初级圈有公共边且公共边之间彼此不相邻，设x是公共边上一顶点，则在环和中顶点x的次数都将是$2+2-2=2$（因去掉公共边，x的次数应少掉2），是一个大于零的偶数。如公共边有彼此相邻者，x是二相邻公共边的公共顶点，则在环和中顶点x的次数为0。但当二初级圈不同时，不可能所有公共顶点都是相邻公共边的公共顶点。

②设初级圈的个数多于2，若这些初级圈两两边互质，其环和的顶点次数很明显，都是≥ 2的偶数。若这些初级圈有公共边，则如①所证，总有一些公共顶点的次数为至少是2的一个偶数(其余公共顶点的次数为0)。于是这些初级圈的环和是图G的一个部分子图，其各顶点上的次数都是偶数。据①中所述的同样的定理，这个环和是一个欧拉圈，或是几个不联接的欧拉圈之和，故是一个圈（广义圈）。

（3）证明定理：在无向图$G=(X, E)$里，二余圈的环和是一余圈。

证：令二余圈是$\omega_1[X_1, Y_1]$，$\omega_2[X_2, Y_2]$，其中

$X_1, Y_1, X_2, Y_2 \neq \phi$，$X_1 \cap Y_1 = \phi$，

$X_2 \cap Y_2 = \phi$，

$X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2 = X$

X_1、X_2、Y_1、Y_2将分整个区为四个部分（见下图4.14）：

X_1X_2，X_1Y_2，Y_1X_2，Y_1Y_2(为使记号简单，以下用AB表示二集合A与B的交集$A \cap B$)，图$G=(X, E)$的任一边，其二顶点所在位置将有16种可能性（计及重复），$\omega_1 \oplus \omega_2$的边在ω_1里或在ω_2里，但不能同时在ω_1与ω_2里。

ω_1中的边，其二顶点所在位置有四种可能性：

X_1X_2，Y_1X_2；X_1Y_2，Y_1Y_2；X_1X_2，Y_1Y_2；X_1Y_2，Y_1X_2。



(一)



(二)



(三)

图4.14

同样，ω_2中的边其二顶点所在位置，也有四种可能性：

X_1X_2，X_1Y_2；Y_1X_2，Y_1Y_2；X_1X_2，Y_1Y_2；X_1Y_2，Y_1X_2。

故$\omega_1 \oplus \omega_2$中的边其二顶点所在位置，仅有下列四种可能性：

X_1X_2，Y_1X_2；X_1Y_2，Y_1Y_2；X_1X_2，X_1Y_2；Y_1X_2，Y_1Y_2。

由此可见，$\omega_1 \oplus \omega_2$中的边，其二顶点分别在

$X_1X_2 \cup Y_1Y_2$与$X_1Y_2 \cup Y_1X_2$内。又

$X_1X_2 \cup Y_1Y_2 \neq \phi$，$X_1Y_2 \cup Y_1X_2 \neq \phi$，

$(X_1X_2 \cup Y_1Y_2) \cap (X_1Y_2 \cup Y_1X_2) = \phi$，

$(X_1X_2 \cup Y_1Y_2) \cup (X_1Y_2 \cup Y_1X_2) = X$。

因若$X_1X_2 \cup Y_1Y_2 = \phi$将导致$X_1X_2 = Y_1Y_2 = \phi$，此时$\omega_1$与$\omega_2$将是同一余圈。因而$\omega_1 \oplus \omega_2 = \phi$，这是$\phi$-余圈。同样，$X_1Y_2 \cup Y_1X_2 = \phi$也导致$\omega_1 \oplus \omega_2 = \phi$。故

$\omega_1 \oplus \omega_2 = \omega[X_1X_2 \cup Y_1Y_2, \ X_1Y_2 \cup Y_1X_2]$。

（4）证明定理：无环联接图$G = (X, E)$上任一初级圈和任一初级余圈是相互正交的。

证：设初级圈为μ，初级余圈为μ_c。μ是联接的，μ_c则分割顶集X为二子集X_1与X_2：

X_1，$X_2 \neq \phi$，$X_1 \cap X_2 = \phi$，$X_1 \cup X_2 = X$。

若μ与μ_c无公共边，即μ的边全含在X_1或X_2内，则与μ和μ_c对应的两个m维向量共数量积为$\mu \cdot \mu_c = 0$。

若μ与μ_c有公共边，由于μ是联接的，当μ沿μ_c的一边自X_1走向X_2，必再沿μ_c的另一边自X_2走回X_1。亦即当μ与μ_c有公共边时，公共边必成对出现。取二者的数量积模2，结果必为0，亦即$\mu \cdot \mu_c \equiv 0$（模2）。

2. E图-M图-H图

（5）如果可能，画出一个V为偶数而e为奇数的E图，否则说明不存在这样图的理由。

解：存在如右图（图4.15）。



图4.15

（6）试证：若G是E图，则G的每一块也是E图。

证：设点v是G的一割点，则G可分为若干个连通子图仅在点v相交，设其为G_1、G_2、…、G_K（$K \geqslant 2$）。对于图G_i，若$u \in V(G_i)$，$u \neq v$，则$d_{G_i}(u) = d_G(u) =$偶数，故$d_{G_i}(v)=$偶数，于是G_i是E图（$i = 1, 2, \cdots, k$）。若u是G_i的割点，如上作法，即知G的每一块均为E图。

（7）试证：若G没有奇数次数的顶点，则存在边也不重的回路C_1，C_2，…，C_m使

$E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_m)$。

证：∵G无奇数次数顶点，∴若有一$v \in V$，使$d(v) > 0$，则G必存在一回路C_1过v。令$G_1 = G - E(C_1)$，则G_1仍没有奇数次数的顶点；若有一$u \in V$，$d_G(u) > 0$，则G_1存在一回路C_2。令$G_2 = G_1 - E(C_2)$，于是G_2是没有奇数次数的顶点，照此作下去，由于$|E|$有限，故有限次后，得$G_m = G_m - E(C_m)$为空图，由作法知C_1、C_2、…、C_m是G的边不重的回路，且$E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_m)$。

（8）设G非平凡且是E图，并设$v \in V$，试证：当且仅当G-v是森林时，G的每条具有起点v的链，都可以延拓成G的一条E环路。

证："⇒"用反证法。设$G-v$含有回路C，则$G-E(C)$的含v的分支G'是E图。在G'上从v开始沿过v的某一链旅行，则旅行结束后仍回到v。此时，若再接着到G的未旅行的边（例如C的边）旅行，则必经过已旅行的边。因此，当$G-v$含有回路时，沿过v的某一链不能延拓成G的E环路，因此，$G-v$是森林。

"⇐"用反证法。设存在一条v的链Q，从v开始沿Q不能延拓成G的E环路，因此沿Q旅游的结果是所有与v相关联的边已走遍且回到v。设已旅游过的图是G'，则G'是E图。于是$G-E(G')$的顶点次数均为偶数，且不全为零，因此，$G-E(G')$含有回路，故$G-v$含有回路，此与$G-v$是森林相矛盾。

（9）试证：若G有H通路，则对V的每一个真子集S有$W(G-S)\leqslant|S|+1$。

证：设u，v_1，v_2，…，v_n，v是G的一条H—通路，令$G'=G+(u,v)$，则G'是H型的。据定理知：$W(G'-S)\leqslant|S|$（对任意非空$S\subset V$），但$W(G-S)\leqslant W(G'-S)+1$。故

$$W(G-S)\leqslant|S|+1.$$

（10）设G是一个具有次数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_Y)$的非平凡的简单图，这里$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_Y$。证明：若不存在小于$\frac{Y+1}{2}$的$m$的值，使$d_m<m$和$d_{Y-m+1}<Y-m$，则$G$有一条Hamilton通路。

证：加入点v_{Y+1}使v_{Y+1}与G中每个点相连得到G'，则G'对应的图序列为$(d_1+1, d_2+1, \cdots, d_Y+1, Y)$，且序列是递增的。由题设，$(d_1, \cdots, d_Y)$不存在$m<\frac{Y+1}{2}$使$d_m<m$和$d_{Y-m+1}<Y-m$，故前述序列不存在$m<\frac{Y+1}{2}$使$d_m<m$，$d_{Y-m+1}<Y-m+1$，即$d_{(Y+1)-m}<(Y+1)-m$。据定理可知：$G$是$H$型的。于是，存在$H$回路$v_{Y+1}$，$v_{i1}$，$v_{i2}$，…，$v_{iY}$，$v_{Y+1}$，因此$v_{i1}$，$v_{i2}$，…，$v_{iY}$是$G$的一条Hamilton通路。

（11）设G是一个具有二分划(X, Y)的简单二分图，这里$|X|=|Y|\geqslant 2$，并且设G有次数序列$(d_1, d_2, \cdots, d_Y)$，这里$d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_Y$，证明若不存在小于或等于$Y/4$的$m$的值，使$d_m\leqslant m$和$d_{Y/2}\leqslant Y/2-m$，则$G$是Hamilton型的。

证：在G中增加边，得到G'，使$G'[X]$完备。

①G中没有孤立点。

用反证法。假设$\exists_v\in X$使$d_G(v)=0$，则$\forall_u\in Y$有$d_G(u)<\frac{Y}{2}$，于是$d_1=d(v)=0<1$，$d_{\frac{Y}{2}}<\frac{Y}{2}$或$d_{\frac{Y}{2}}\leqslant\frac{Y}{2}-1$，即$m=1$，与题设矛盾。显然，$v\in Y$时也有同样结果。

③G'中有H回路。

事实上，由定理的条件对G'成立。

用反证法。假设存在$m<\frac{Y}{2}$，使$d_m'\leqslant m$，且$d_{Y-m}'<Y-m$。

$$\because\forall_v\in X有\ d'_G(v)\geqslant\left(\frac{Y}{2}-1\right)+1=\frac{Y}{2},$$

$$\forall_v \in Y \text{有} d'_G(v) \leqslant \frac{Y}{2},$$

$\therefore d_m'$对应的点在Y内，而d'_{Y-m}对应的点在X内，且$d'_{\frac{Y}{2}}+2 \leqslant d'_{\frac{Y}{2}}+2 \leqslant \cdots \leqslant d'_{Y-m}$等对应的点都在$X$内，这些点一共有$\frac{Y}{2}-m=m'$个，它们的次数在$G'$中$<Y-m$，因而在$G$中均$\leqslant Y-m-1-(\frac{Y}{2}-1)=\frac{Y}{2}-m=m'$。另一方面，在$Y$中有$m$个点在$G'$中的次数$\leqslant d'_m \leqslant m$，即这$m$个点在$G$中的次数$\leqslant m$，这两部分点合起来共有$m+m'=\frac{Y}{2}$个，即在$G$中$d_{\frac{Y}{2}} \leqslant \max\{m, m'\}$。

i）若$m \leqslant \frac{Y}{2}$，即存在$d_m=d'_m \leqslant m$且$d_{\frac{Y}{2}} \leqslant \max\{m, m'\}=m'=\frac{Y}{2}-m$，这与假设矛盾

ii）若$m>\frac{Y}{4}$，则$m'<\frac{Y}{4}$，在G中Y部有m'个点的次数$\leqslant m'$；因此，在G中前m'个点（不一定均在Y中）的次数$\leqslant m'$，即存在$m'<\frac{Y}{4}$，使$d_{m'} \leqslant m'$且$d_{\frac{Y}{2}} \leqslant \max\{m, m'\}=m=\frac{Y}{2}-m'$，也与假设矛盾。

③G'中的H回路是G中的H回路。

事实上，因为Y中的每一点都在这回路上恰好关联于两条边，即共有$2|Y|$条边与Y的顶点关联，又因为这$2|Y|=2|X|$条边一定与X的顶点相关联，而X中每点又最多与这些边中的两条相关联，并且又不得少于与这些边中的两条相关联（否则总数达不到$2|X|$），故X中每一点都恰好与这些边中的两条相关联，即这些边构成这H回路之全体，它显然也是G中的H回路。

（12）证明：若G是个具有$Y>2\delta$简单连通图，则G有一条长度至少是2δ的通路。

证：当$\delta \leqslant 1$时，显然成立。设$\delta \geqslant 2$时，用反法证证之。令$P=v_1, v_2, \cdots, v_{l+1}$为$G$中一条最长路，且$l<2\delta$，令

$$S=\{v_i|(v_1v_{i+1}) \in E\}, \quad T=\{v_i|(v_iv_{l+1}) \in E\},$$

则S、T均非空，由于P是最长路，故v_1，v_{l+1}只能与路P中的点相连；于是$|S| \geqslant \delta$，$\therefore S \cap T \neq \phi$，$v_i \in S \cap T$，则有长为$l+1$的回路（如图4.16）

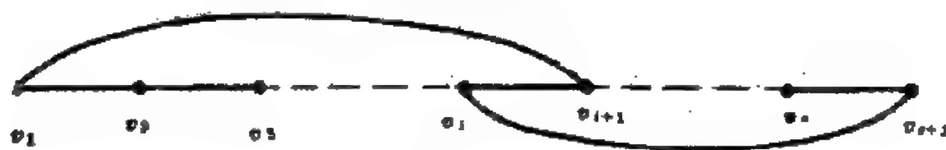


图4.16

$$v_1, v_2, \cdots, v_i, v_{l+1}, v_l, \cdots, v_{i+1}, v_1$$

由于$Y>2\delta$，G连通，故有点$u \neq v_i$（$i=1, \cdots, l+1$）；$u \in V$，$(u, v_i) \in E$，于是u，$v_i \cdots v_{i-1}$是一条长为$l+1$的路矛盾。

（13）若G的任何两个顶点都由一条Hamilton通路连结，则G是Hamilton连通的。

①证明：若G是Hamilton连通的，且$Y \geqslant 4$，则$\varepsilon \geqslant [\frac{1}{2}(3Y+1)]$。

②对于$\nu \geq 4$，构造一个具有$\varepsilon = [\frac{1}{2}(3\nu+1)]$的Hamilton连通图.

证：①当$\nu = 4$时，若G是Hamilton连通的，则$G = K_4$ 故$\varepsilon = [\frac{1}{2}(3\nu+1)] = 6$，即当$\nu = 4$时，结论成立. 对某$G$设$\varepsilon < [\frac{1}{2}(3\nu+1)]$，则$G$必有一次数$\leq 2$的顶点，否则$\frac{3\nu}{2} \leq \varepsilon < [\frac{1}{2}(3\nu+1)]$. 当$\nu = 2k$时，有$3k \leq \varepsilon < 3k$；当$\nu = 2k+1$时，有$3k+2 \leq \varepsilon < 3k+2$，矛盾. 设$G$有次数为2的顶点$v$，设$v_1$、$v_2$与$v$相邻，则$v_1$、$v_2$之间不存在Hamilton通路，矛盾. $\therefore \varepsilon \geq [\frac{1}{2}(3\nu+1)]$.

③当$\nu = 2k+1$时，（见图4.17）

$$\varepsilon = k + 2(k-1) + 4 = 3k+2 = 3\cdot\frac{\nu-1}{2} + 2 = \frac{1}{2}(3\nu+1) = [\frac{1}{2}(3\nu+1)];$$

当$\nu = 2k$时，（见图4.18）

$$\varepsilon = (k-1) + 2(k-2) + 5 = 3k = \frac{3}{2}\nu = [\frac{1}{2}(3\nu+1)].$$

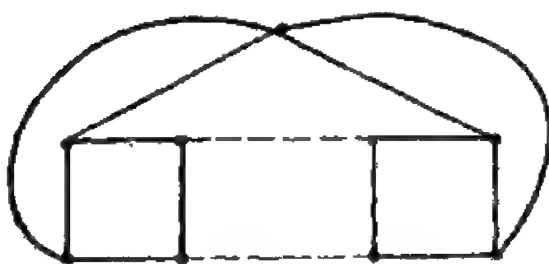


图4.17



图4.18

（14）若G不是Hamilton型的，但对每一个$v \in V$，$G - v$都是Hamilton型的，则G是亚Hamilton型的. 证明Petersen图是亚Hamilton型的.

证：Petersen图（如图4.19）边集$E' = \{(v_1v_7), (v_2v_8), (v_3v_9), (v_4v_{10}), (v_5v_6)\}$将Petersen图分成两部分，因此若Petersen图有Hamilton回路，必经过E'中偶数条边；显然，经过E'中两条边是不能形成Hamilton回路的，设经过E'中4条边(v_5v_6)，(v_4v_{10})，(v_3v_9)，(v_2v_8)（由对称性，这样设是不失一般性的）. 若是Hamilton回路，一定还含有(v_1v_2)，(v_1v_5)，(v_7v_9)，(v_7v_{10})，(v_8v_6)，(v_4v_3)，但这些显然凑不成回路，$\therefore$Petersen图不是Hamilton型的.

由于图的顶点的对称性，只令$v = v_1$证明即可. $G - v_1$的一Hamilton回路为

$v_5v_6v_9v_4v_3v_8v_7v_{10}v_4v_2$（如图4.20）.

$\therefore$Petersen图是亚Hamilton型的.

3. 边（线）图

（15）证明定理：令G和G'是有同构的线图的连通图，除了一个是K_3而另一个是$K_{1,3}$，

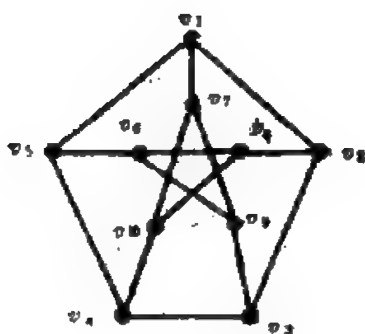


图4.19

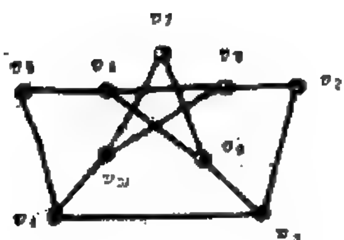


图4.20

外，G和G'同构。

证：先注意在至多有四个点的连通图中，仅有的具有同构的线图的两个不同的图是K_3和$K_{1,3}$。更注意到，若ϕ是从G到G'上的一个同构，则有一个从$L(G)$到$L(G')$上的导出同构ϕ_1。当证明了下列更强的结果时，定理得证。

若G和G'有多于四个点，则任何从$L(G)$到$L(G')$上的同构ϕ_1可以由正好一个从G到G'上的同构导出。

先证明ϕ_1至多从一个同构导出。假定存在二个这样的同构ϕ和ψ。我们将证明对于G的任何一个点v，$\phi(v)=\psi(v)$。一定存在两条线$x=uv$和$y=uw$或vw。若$y=vw$，则点$\phi(v)$和$\psi(v)$都是既在线$\phi_1(x)$上又在线$\phi_1(y)$上的点，但因为同时在这两条线上的点只有一个，所以$\phi(v)=\psi(v)$。同理，当$y=uw$时，$\phi(u)=\psi(u)$。因为线$\phi_1(x)$含有两个点$\phi(v)$和$\phi(u)=\psi(u)$，所以又得到$\phi(v)=\psi(v)$。因此ϕ_1至多从一个G到G'上的同构导出。

现在证明存在一个同构ϕ，使ϕ_1可以由ϕ导出，第一步要证明G的一个$K_{1,3}$子图的线$x_1=uv_1$，$x_2=uv_2$和$x_3=uv_3$在ϕ_1下一定映到G'的一个$K_{1,3}$子图的各条线。令y是另外一条与至少一条x_i邻接的线，它或者仅与x_1、x_2、x_3中的一条线邻接，或者与所有三条线都邻接.对于任何一个$p\geqslant 5$的图一定存在这样的一条线y，而对于$p<5$定理是平凡的。若三条线$\phi(x_i)$形成一个三角形而不是$K_{1,3}$，则$\phi_1(y)$只能邻接于这三条线中的恰好二条。所以每一个$K_{1,3}$一定映到一个$K_{1,3}$。

令$S(v)$记邻接于v的线的集。现证明对于G中的每一点v，在G'中恰有一点v'使$S(v)$在ϕ_1下映到$S(v')$。若$\deg v\geqslant 2$，令y_1和y_2是v处的每条线x，v'关联于$\phi_1(x)$，而对于v'处的每条线x'，v关联于$\phi_1^{-1}(x')$。若$\deg v=1$，令$x=uv$是v处的线，则$\deg u\geqslant 2$，从而$S(u)$映到$S(u')$且$\phi_1(x)=u'v'$。因为对于v'处的每一条线x'，线$\phi_1^{-1}(x')$和x一定有一个公共点，所以u在$\phi_1^{-1}(x')$上，从而u'在x'上。即$x'=\phi_1(x)$，故$\deg v'=1$。因为仅当$u=v$时，$S(u)=S(v)$，所以映射ϕ是从V到V'的一一映射。现在在V'中给定v'，有一定关联线x'。以uv记$\phi_1^{-1}(x')$，则或者$\phi(u)=v'$或者$\phi(v)=v'$，从而ϕ是映于V'上的。

最后，对于G中的每一条线$x=uv$，$\phi_1(x)=\phi(u)\phi(v)$；又对G'中的每一条线$x'=u'v'$，$\phi_1^{-1}(x')=\phi^{-1}(u')\phi^{-1}(v')$，故$\phi$是一个同构，$\phi_1$就由这个同构导出。

（16）证明定理：一个图是一个树的线图当且仅当它是一个连通的块图，其中每个割点恰在两个块中。

证：假定$G=L(T)$，T是某个树．则因为一个树的线和块一致，G也是$B(T)$．G的每个割点x对应于T的一条桥uv，它恰在对应于G中u和v处两个星形图的两个块上．这就证明了条件的必要性．

现证充分性．令G是一个块图，其中每个割点恰在两个块中．因为一个块图的每个块是完全的，由定理：一个连通图同构于它的线图当且仅当它是一个圈，可知：存在一个图H，使$L(H)=G$．若$G=K_3$，我们可取$H=K_{1,3}$；若G是任何其它的块图，我们证明H一定是一个树．事实上，假定H不是一个树，故它必含一圈．若H本身是一个圈，则据上题（15）的结果可得：$L(H)=H$．但唯一的一个是块图的圈是K_3，我们不考虑此种情形．从而H必真含一个圈，由此得H有一个圈Z和邻接于Z的两条线的一条线x，它与G的某条线y不邻接．$L(H)$的点x和y在$L(H)$的一个圈上，且它们不邻接．因为$L(H)$是一个块图，这与定理："一个图H是某个图的块图当且仅当H的每一个块是完全的．"中的条件相矛盾．故H是一个树．

4．树

（17）若无环图G的任意两个顶点均由唯一的路所连接，则G是树．

证：由题设显然G是连通的，现证G不含回路．G不含圈，若G含回路$C=\{v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots,\ v_{i_n},\ v_{i_1}\}$，则$C$中的任两点有两条不同的通路连接，与题设矛盾，故$G$不含回路，故$G$是树．

（18）试证：恰有两个次数为1的顶点的每一个树是通路．

证：设G是一个树，$V(G)=\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_\gamma\}$．不妨设$d(v_1)=d(v_2)=1$，由题设$d(v_i)\geqslant 2$，$i=3$，$\cdots$，$\gamma$．$\because \sum_{i=1}^{\gamma} d(v_i)=d(v_1)+d(v_2)+\sum_{i=3}^{\gamma} d(v_i)=2\varepsilon=2(\gamma-1)$，

$\therefore \sum_{i=3}^{\gamma} d(v_i)=2\gamma-4=2(\gamma-2)$．又$d(v_i)\geqslant 2$，$i=3$，$\cdots$，$\gamma$，$\therefore$必有$d(v_i)=2$，$i=3$，$\cdots$，$\gamma$．故$G$是通路．

（19）若G是树且$\Delta\geqslant K$，则G至少有K个次数为1的顶点．

证：设G恰少有m个次数为1的顶点，由$\varepsilon=\gamma-1$知$\sum_{v\in V} d(v)=2\gamma-2$．设度数为1的顶点集合为$V_1$，则$\sum_{v\in V-V_1} d(v)=2\gamma-2-m$．

又$\Delta\geqslant K$，$v\in V-V_1$有$d(v)\geqslant 2$，故$\sum_{v\in V-V_1} d(v)\geqslant K+2\times(v-m-1)=K+2\gamma-2-2m$，即$2\gamma-2-m\geqslant k+2\gamma-2-2m$，即$m\geqslant K$，于是$G$至少有$K$个次数为1的顶点．

（20）证明：若G是一个森林且恰好有$2k$个奇数次数的顶点，则在G中有k条边不重并的通路P_1，P_2，$\cdots$，P_k，使$E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_k)$．

证：用归纳法证之．当$k=1$时，G有两个奇次数的顶点，G必连通故为一个树．由前题（18）知G是通路，即$E(u)=E(P_1)$．

若$k=n-1\geqslant 1$时命题正确．当$k=n$时，设v_1，v_2是G的同一个分支中的两个奇数次数的顶点．于是G中必有$(v_1,\ v_2)$一通路．设为P_k，令$G-E(P_k)=G_1$，显然G_1有$2n-$

$2=2(n-1)$个奇数次数的顶点．且G_1仍为森林，由归纳法假设$E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_{k-1})$．

$\therefore E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_{k-1})\cup E(P_k)$．

（21）设T是具有$k+1$个顶点的任意一棵树．证明：若G是简单的且$\delta\geqslant k$，则G有一个子图同构于T．

证：用归纳法证之．当$k=1$时，$T=k_2$，G是简单的且$\delta\geqslant 1$，显然G有子图同构于T．设命题对$k=n-1$成立；当$k=n$时，T有$n+1$个顶点，至少有一个次数为1的顶点，设之为v．令$T_1=T-v$则T_1仍是一个树，且有$n=(n-1)+1$个顶点．设G是$\delta\geqslant k$的简单图，此时$\delta\geqslant n$，显然$\delta\geqslant n-1$，由归纳假设知G有子图，$G_1\subseteq G$使$G_1\cong T_1$．设$vu\in E(T)$，设$u'\in V(G_1)$且$u\leftrightarrow u'$，由G是简单的且$\delta\geqslant n$知G至少有$n+1$个顶点，$\Upsilon(G_1)=\Upsilon(T_1)=n$．故$V(G)-V(G_1)\neq\phi$．由$\delta(G)\geqslant n$，$\Upsilon(G_1)=n$可得，必有$v'\in V(G)-V(G_1)$，使$u'v'\in E(G)$．于是，$G_1$加上$v'v'$及$v'$得一图$G_2$，显然$G_2\subseteq G$且$G_1\cong T$，即$k=n$时，命题也真．故由归纳法知该命题为真．

（22）饱和烃是形如C_mH_n的分子，其中每个碳原子的价键为4，每一个氢原子的价键为1，且价键序列不构成回路．试证：每一个正整数m，仅当$n=2m+2$时C_mH_n方能存在．

证：C、H对应为图的顶点．当且仅当C与H相连时，对应的顶点邻接，形成图G．图显然是连通的，且无回路，故G是树．$\Upsilon(G)=m+n$，$\varepsilon(G)=m+n-1$．由题设对应C的G中顶点次数为4，对应H的顶点次数为1，故 $4m+n=2\varepsilon=2(m+n-1)$， 即$n=2m+2$．

（23）设G连通且$e\in E$，试证：

①当且仅当e是G的割边时，e才在G的每个支撑树中；

②当且仅当e是G的圈时，e才位于G的非支撑树部分．

证：①$\because e$是G的断边$\Longleftrightarrow G-e$不连通$\Longleftrightarrow G-e$不含G的支撑树$\Longleftrightarrow e$在G的每个支撑树中．

②G的支撑树不含回路，e是圈，故e不能含在G的任意支撑树中．

反之，若e位于G的非支撑树部分，则e必为圈．否则，若e是割边，由①知在G的每个支撑树中，引出矛盾；否则e不是圈不是割边．

设T是G的任一支撑树，由其性质知$T+e$含一回路C．设$e'\neq e$，$e\in C$，则$T+e-e'$是G的支撑树，引出矛盾．故e必是圈．

（24）设F是G的极大森林，证明：

①对G的每一个分支H，$F\cap H$是H的一个支撑树；

②$\varepsilon(F)=\Upsilon(G)-\omega(G)$．

证：①显然$F\cap H\subseteq H$且$F\cap H$（由F是森林）不含回路．由F的极大性知$F\cap H$连通故$F\cap H$是树，由F的极大性$V(F\cap H)=V(H)$．$\therefore F\cap H$是H的一个支撑树．

③设G的分支为H_1，H_2，…，H_w，由①知：

$$\varepsilon(F\cap H_i)=\Upsilon(H_i)-1$$

组 $$F=(F\cap H_1)\cup(F\cap H_2)\cup\cdots\cup(F\cap H_w)，$$

故 $$\varepsilon(F)=\sum_{i=1}^{W}\varepsilon(F\cap H_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{W} (\Upsilon(H_i) - 1)$$
$$= \Upsilon(G) - \omega(G) \ .$$

(25) 试证：G至少含有 $\varepsilon - \Upsilon + \omega$条不同的回路.

证：当$\omega = 1$时，G连通．令$k = \varepsilon - \Upsilon + w$，此时$k = \varepsilon - \Upsilon + 1 = \varepsilon - (\Upsilon - 1)$.

设T是G的一个生成树．设$e \notin E(T)$，则$T + e$含有唯一的一条回路C；若$e \neq e_1$，显然当$e_1 \in E(T)$时，$T + e_1$含唯一的回路C_1，且$C \neq C_1$，这是因为C含e不含e_1而C_1含e_1不含e，但不在T中的边共有K条，故G至少含K条不同的回路．

设$\omega = n - 1 \geqslant 1$时结论正确．当$\omega = n$时，$G$有$n$个分支，任去掉一个分支后所得的图为$G_1$，设去掉的分支为$H_1$．由归纳假设知：$G_1$至少含有$\varepsilon(G_1) - \Upsilon(G_1) + n - 1$条不同的回路．又$H_1$至少含有$\varepsilon(H_1) - \Upsilon(H_1) + 1$条不同的回路．故$G$至少含有

$$\varepsilon(G_1) - \Upsilon(G_1) + n - 1 + \varepsilon(H_1) - \Upsilon(H_1) + 1$$
$$= [\varepsilon(G_1) + \varepsilon(H_1)] - [\Upsilon(G_1) + \Upsilon(H_1)] + n - 1 + 1$$
$$= \varepsilon(G) + \Upsilon(G) + n \text{条不同的回路.}$$

由归纳法，G至少含有$\varepsilon - \Upsilon + \omega$条不同的回路．

(26) 证明：若G包含k个边不重并的支撑树，则对于顶点集合V的每一个分划$(V_1, V_2, \cdots, V_n)$，端点在这个分划的不同部分的边数至少是$k(n-1)$．

证：构造图G^*，使$V(G^*) = u_1, u_2, \cdots, u_n$，$u_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$对应于$V_i$，当且仅当$e = uv$，$u \in V_i$，$v \in V_j$，$i \neq j$，$e \in E(G)$时，有$e' = u_i u_j \in E(G^*)$，显然$G$有$k$个边不重并的支撑树，则$G^*$有$k$个边不重并的支撑树，于是

$$\varepsilon(G^*) \geqslant k(\Upsilon(G^*) - 1) = k(n-1) \ .$$

但任一$e' \in E(G^*)$显然对应于$e \in E(G)$，其端点在V的分划的不同部分，故本题结论正确．

(27) ①设H是一个图，其中任意两个邻接顶点，用k条边联接，且设G是H的基本简单图．证明：$\tau(H) = K^{\Upsilon-1}\tau(G)$；

②若将G的每条边用长为K的一条通路代替，这个新图用H表示．证明：$\tau(H) = K^{\varepsilon-\Upsilon+1}\tau(G)$；

③从②推出$\tau(K_{2,n}) = n2^{n-1}$．

证：①G的每个支撑树显然也是H的支撑树，但每个支撑树有$\Upsilon - 1$条边，而每条边的不同取法有K种．故对应G的一个支撑树H有$K^{\Upsilon-1}$个支撑树．

$$\therefore \tau(H) = K^{\Upsilon-1}\tau(G) \ .$$

②每条边用长为K的通路代替，相当于对这条边进行$K - 1$次割分，每次增加一个点，也增加一条边，故有

$$\varepsilon(H) - \Upsilon(H) + 1 = \varepsilon(G) - \Upsilon(G) + 1 \ .$$

令T是G的支撑树，而$\varepsilon(\bar{T}) = \varepsilon(G) - \Upsilon(G) + 1$，对应$G$的每个支撑树：$T$把每一条边$e \in \bar{T}$对应的$H$中的长为$K$的通路任去掉一边，则得$H$的一个支撑树；而连枝中共有$\varepsilon - \Upsilon + 1$条边而对应的长为$K$的通路，其去边的方式对于每条而论有$K$种．故不同的看法总共有$K^{\varepsilon-\Upsilon+1}$种，即对应$G$的一个支撑树$H$有$K^{\varepsilon-\Upsilon+1}$个支撑树．

于是，$\tau(H) = K^{\varepsilon-\Upsilon+1}\tau(G)$.

③由②$K_{2,n}$相当于H，而G为有两个顶点且这二顶点间有n条边联接的图，将G的每一边

用长为 2 的一条通路代替，则得$K_{2,n}$。据②得

$$\tau(K_{2,n}) = K^{\varepsilon-\gamma+1}\tau(G) = 2^{n-2+1}\cdot n = n\cdot 2^{n-1}。$$

5.平面图

(28) 证明：$K_{3,3}$是非可平面图.

证：用反证法证之．设G是对应于$K_{3,3}$的一个平面嵌入图，用v_1、v_2、v_3、v_4、v_5和v_6表示G的顶点，G对应于$K_{3,3}$的顶点二分划为

$$(\{v_1,\ v_2,\ v_3\},\quad v_4,\ v_5,\ v_6\})$$

由于G是完备二分图，于是可取回路$C = v_1v_5v_2v_4v_1$是一条平面Jordan曲线，而v_3或者在intc内或者在extc内，不失一般性设在intc内．于是v_3v_5，v_3v_4把intc分成两个区域：intc 1和intc 2．其中：

$$C_1 = v_1v_5v_3v_5v_1,\quad C_2 = v_2v_4v_3v_6v_2,$$

又∵v_6必在extc、intc 1、intc 2这三个区域中的一个．不失一般性，设$v_6\in$extc，由于$v_3\in$intc，从Jordan曲线定理知：v_3v_6必与C相交，这与G是平面嵌入图相矛盾．

(29) 证明：所有图在R^3中都是可"嵌入"的．

证：显然只考虑简单图即可．因为空间的线是没有粗细的，而点是没有大小的，所以简单图的顶点和边能嵌入，那么圈和多重边也能嵌入．

又因为简单图中完备图的边最多，故仅考虑完备图即可．设K_γ是一完备图，可先将K_γ的γ个顶点嵌入R^3中，使得任意四个点都不在一个平面上，然后将γ个点中任意两点间连接一条直线，使得到K_γ在R^3中的一个嵌入（因为任意四点及其连线都构成一个四面体）．

(30) ①试证：若G是围长$k\geq 3$的连通平面图，则$\varepsilon\leq k(\gamma-2)/(k-2)$；

②利用①证明：Petersen图是非可平面的．

证：①∵G的围长为 k (≥ 3)，∴$\forall f\in F(G)$ 有$d_G(f)\geq k$，即$k\phi\leq \sum\limits_{f\in F} d_G(f) = 2\varepsilon$，

亦即 $\phi\leq\frac{2\varepsilon}{k}$，由Euler公式知，

$$\gamma-\varepsilon+\frac{2\varepsilon}{k}\geq\gamma-\varepsilon+\phi = 2,$$

即
$$\varepsilon\leq k(\gamma-2)/(k-2)$$

②用反证法之。解设Petersen图是可平面的，则由①得：

$$\varepsilon\leq k(\gamma-2)/(k-2),$$

$$15 = \varepsilon\leq k(\gamma-2)/(k-2) = \frac{5\times(10-2)}{5-2} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3},$$

矛盾，故Petersen图是非可平面图。

(31) ①证明：若G是$\gamma\geq 11$的简单平面图，则G^c是非平面的；

②找出一个$\gamma = 8$的简单平面图，使G^c也是平面的．

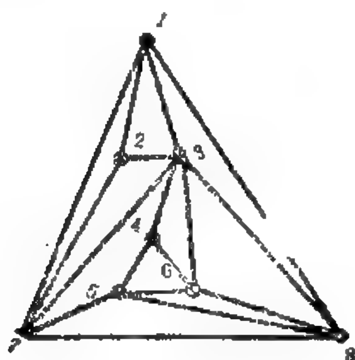
①证：
$$\because\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} = \varepsilon(G)+\varepsilon(G^c)\leq\varepsilon(G^c)+3\gamma-6,$$

$$\therefore \quad \varepsilon(G^C) \geqslant \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 3\gamma + 6 .$$

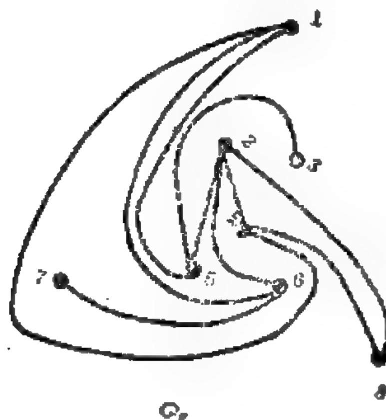
$$\text{当} \quad \gamma \geqslant 11\text{时}, \ \varepsilon(G^C) \geqslant \frac{12(\gamma-1)}{2} - 3\gamma + 6 = 3\gamma > 3\gamma - 6 ,$$

故G^C是非平面的。

②解：



G



G_p

图4.21

(32) ①证明：厚度$\theta(G) \geqslant \lceil \varepsilon/(3\gamma-6) \rceil$；

②推演：$\theta(K_\gamma) \geqslant \lceil \gamma(\gamma-1)/6(\gamma-2) \rceil$，利用上题的结果证明等式对所有$\gamma \leqslant 8$成立。

证：①设$G = \bigcup_{i=1}^{\theta(G)} G_i$，$G_i$是平面图

$\because \varepsilon(G_i) \leqslant 3\gamma - 6 \ (i = 1, 2, \cdots, \theta(G))$，

$$\therefore \ \varepsilon = \sum_{i=1}^{\theta(G)} \varepsilon(G_i) \leqslant \theta(G)(3\gamma-6) .$$

故

$$\theta(G) \geqslant \frac{\varepsilon}{3\gamma-6} \qquad \text{即} \qquad \theta(G) \geqslant \left\lceil \frac{\varepsilon}{3\gamma-6} \right\rceil .$$

② $\because$
$$\varepsilon(K_\gamma) = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2},$$

$\therefore$
$$\theta(K_\gamma) \geqslant \left\lceil \frac{\gamma(\gamma-1)}{2(3\gamma-6)} \right\rceil = \lceil \gamma(\gamma-1)/6(\gamma-2) \rceil .$$

当$3 \leqslant \gamma \leqslant 4$时，

$$\because \quad \frac{\gamma(\gamma-1)}{6(\gamma-2)} = 1 \text{和} \theta(K_\gamma) = 1 ,$$

$$\therefore \quad \theta(K_\gamma) = \lceil \gamma(\gamma-1)/6(\gamma-2) \rceil ;$$

当$4 < \gamma \leqslant 8$时，

$\because \frac{\gamma(\gamma-1)}{6(\gamma-2)}=\frac{\gamma}{6}+\frac{\gamma}{6(\gamma-2)}=\frac{\gamma}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3(\gamma-2)}>\frac{\gamma}{6}+\frac{1}{6}\geqslant\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$，

和 $\frac{\gamma(\gamma-1)}{6(\gamma-2)}\leqslant\theta(K_5)=2$

$\therefore \theta(K_\gamma)=\lceil\gamma(\gamma-1)/6(\gamma-2)\rceil$

（33）证明：若G是平面嵌入三角剖分，则$\varepsilon=3\gamma-6$。

证：$\because G$是平面嵌入三角剖分，

$\therefore 2\varepsilon=3\phi$，

由Euler公式知：

$$2=\gamma-\varepsilon+\phi=\gamma-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=\gamma-\frac{1}{3}\varepsilon,$$

即　　$\varepsilon=3\gamma-6$。

（34）在某平面嵌入图G中，设u、x、v和y（按此循环次序）是桥B对于回路C的四个不同的附着点（见图4.22）。证明：在B中存在一条(u, v)—通路P和一条(x, y)—通路Q，使得：

①P和Q对于C是内部不相交的；

②$|V(P)\cap V(Q)|\geqslant 1$。

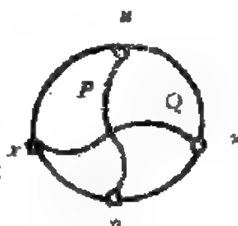


图4.22

证：设B是内桥。因u，v，x，$y\in V(B)$，故存在(u, v)-通路$P\subset B$，(x, y)-通路$Q\subset B$，且P、Q与C均是内部不相交的。又因u，v、x、$y\in V(B, C)$，且以u，x，v和y的次序出现在C上以及G是平面嵌入图，所以P与Q至少有一个交点。于是有$|V(P)\cap V(Q)|\geqslant 1$。

（35）①设$C=v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1$是非Hamilton型连通图$G$中的一条最长（见图4.23）。回路，证明：

（a）存在一个桥B，使$V(B)-V(C)\neq\phi$；

（b）若v_i和v_j是B的附着顶点，则$(v_{i+1}, v_{j+1})\notin E$。

②推演：若$\alpha<K$，则G是Hamilton型的。

证：①（a）否则对C的每一个桥B都有$V(B)-V(C)=\phi$，即G中所有顶点都在C上，亦即C是G的一条Hamilton回路，矛盾。

（b）否则假设$(v_{i+1}, v_{j+1})\in E$，则

$C'=v_1v_2\cdots v_iv_Bv_jv_{j-1}\cdots v_{i+1}v_{j+1}\cdots v_nv_1$

的长度将比C的长度长，矛盾。

②否则假设G是非Hamilton型的，则由①知，G存在一条最长的回路C和桥B，使得

$$V(B)-V(C)\neq\phi,$$

并且若v_i，$v_j\in V(B\cap C)$，则$(v_{i+1}, v_{j+1})\notin E$。

设B有m个附着点v_{i1}，v_{i2}，$\cdots$，v_{im}，则v_{i1+1}，v_{i2+1}，$\cdots$，v_{im+1}两两不相邻，于是有

$$\alpha\geqslant|\{v_{i1+1}, v_{i2+1}, \cdots, v_{im+1}\}|=m,$$

又显然有$k\leqslant|\{v_{i1}, v_{i2}\cdots, v_{im}\}|=m$，

故有$\alpha\geqslant k$，引出矛盾。

（36）证明：连通的平面嵌入图G是2-面可着色的充要条件是G为Euler型的。

证：“$\Rightarrow$”设G具有一个正常2-面着色(F_1, F_2)，假设G是非Euler型的，即G存在奇



图4.23

数次顶点v。

（1°）若$d(v)=1$，则与v点关联的那条边不可能分离两种不同颜色的面，即此时G不具有任何正常面着色，引出矛盾。

（2°）若$d(v)=2k+1$（$k=1,2,\cdots$），显然G也不具有任何正常2-面着色，矛盾；于是G一定是Euler型的。

“⇐”设平面嵌入图G是Euler型的，则由定理可知：G没有奇数次数的顶点。再由前面习题（7）的结果知，G是不重并的若干回路的和集。

设G共有m条边不重并的回路。若对每一个回路的内部着有颜色1，外部着有颜色0，则G的每个面各得到m次着色。若用这m个数字的模2和来表示该面的颜色，于是便得到G的一个正常2-面着色，即G是2-面可着色的。（见图4.24）

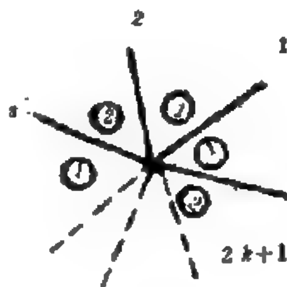


图4.24

（37）证明：每个Hamilton型平面嵌入图都是4-面可着色的。

证：设G是个Hamilton型的平面嵌入图，则G存在一条Hamilton回路C，将$F(G)$划分成两部分F_1和F_2，使F_1的每个面均在C的内部，而F_2的每个面均在C的外部。

$\because V(G)=V(C)$，$\therefore C$的内部再无G的顶点。又$\because G$是平面嵌入图，$\therefore C$的所有内桥都是互相回避的单根边。

于是G中C的内部存在一个正常2-面着色，同理G中C的外部也存在一个正常2-面着色。因此，G是4-面可着色的。

6.对偶图

（38）若一个平面嵌入图和它的对偶同构，这个平面嵌入图称为是自对偶的。

①证明，若G是自对偶的，则$\varepsilon=2\gamma-2$；

②对于每个$n\geqslant4$，找出在n个顶点上的自对偶嵌入图。

证：①$\because \gamma(G)=\gamma(G^*)=\phi(G)$，

$\therefore \gamma(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)$

$=\gamma(G)-\varepsilon(G)+\gamma(G)=2$

即$\varepsilon=2\gamma-2$。

②当$n\geqslant4$时，$n-1$轮就是自对偶平面嵌入图。

（39）①证明：当且仅当$B^*=\{e^*\in E(G^*)|e\in B\}$是$G^*$的一条回路时，$B$是平面嵌入图$G$的一个割集；

②推論：Euler型平面嵌入图的对偶是二分图。

证：① "⇒" 设 B 是 G 的割集，对 $|B|$ 施归纳证明 B^* 是 G^* 的一条回路。

当 $|B|=1$ 时，B^* 是 G^* 的一个圈，结论显然成立。

假设 $|B|=k$ 时，结论成立，往证 $|B|=k+1$ 时，结论亦成立。事实上，$e\in B$，则 $B-\{e\}$ 是 $G-e$ 的割集，且 $G-e$ 的对偶是 $G^*\cdot e^*$。由归纳假设知：$(B-\{e\})^*$ 是 $G^*\cdot e^*$ 的一条回路，于是，$B^*=(B-\{e\})^*\cup\{e^*\}$ 便是 G^* 的一条回路。

"⇐" 设 B^* 是 G^* 的一条回路，显然 B 是 G 的一个边割（∵$G-B$ 显然是不连通的）。由结论："每个边割都是割集的不相交和集" 可知：B 是割集的不相交和集，于是可设割集 $B_1\subseteq B$；若能证明 $B=B_1$，则充分性得以证明。可用反证法证之。假设 $B_1\subset B$，∵B_1 是割集，由必要性知，B_1^* 是 G^* 的一条回路，又∵$B_1^*\subset B^*$，这与 B^* 是 G 的一条回路矛盾。

②由于Euler图的任一割集均含偶数条边，故在对应的对偶图中，由①知不含奇回路，因此Euler图的对偶图是二分图。

(40) 设 G 是平面嵌入图，证明：

①当且仅当 G 连通时，$G^{**}\cong G$；

② $\chi(G^{**})=\chi(G)$。

证：① "⇒" 设 $G^{**}\cong G$，假设 G 不连通，

∵ $\gamma(G^{**})=\phi(G^*)<\gamma(G^*)$，

∴ $G^{**}\not\cong G$，矛盾。

"⇐" 设 G 连通，并设 $v_i\in V(G)$，

$f_i^*\in F(G^*)$，$v_i^{**}\in V(G^{**})$。

由对偶图的作法知，可建立如下对应关系：

$$V(G)\leftrightarrow F(G^*)\leftrightarrow V(G^{**}),$$

$$E(G)\leftrightarrow E(G^*)\leftrightarrow E(G^{**}),$$

且有 v_i，v_j 与 e 关联 $\leftrightarrow f_i^*$，f_j^* 与 e^* 关联

$\leftrightarrow v_i^{**}$，v_j^{**} 与 e^{**} 关联，

∴ $G^{**}\cong G$。

②若 G 连通，∵ $G^{**}\cong G$，

∴ $\chi(G^{**})=\chi(G)$。

若 G 不连通，∵ G 的每个分支都与 G^{**} 中相对应的子图同构，∴ $\chi(G)\leq\chi(G^{**})$；

又∵ G^{**} 是由与 G 的每个分支同构的图在一个公共点上拼接而成的，

∴ G^{**} 存在一个正常的 $\chi(G)$-着色，即 $\chi(G)\geq\chi(G^{**})$，由上得 $\chi(G^{**})=\chi(G)$。

(41) 设 T 是连通平面嵌入图 G 的支撑树，并设 $E^*=\{e^*\in E(G^*)|e\notin E(T)\}$。试证：$T^*=G^*[E^*]$ 是 G^* 的支撑树。

证：(1°) ∵ $\{e|e\notin E(T)\}$ 不含割集，

∴由前题 (39) 知：

$E^*=\{e^*\in E(G^*)|e\notin E(T)\}$ 不含回路，

即 $T^*=G^*[E]$ 不含回路。

(2°) ∵ $\gamma(G^*)=\phi(G)=\varepsilon(G)-\gamma(G)+2$

并且$|E^*|$ = G中不在T上的边数 $=\varepsilon(G)-[\nu(G)-1]$,

$$\therefore \varepsilon(T^*)=|E^*|=\varepsilon(G)-\nu(G)+1$$
$$=\nu(G^*)-1.$$

(3°) $\forall f^*\in V(G^*)$, G中存在一条回路C和一条边e使 $C=b(f)$, $e\in E(C)-E(T)$, 即G^*中存在边$e^*\in E^*$, 使得e^*的一个端点是f^*。故$T^*=G^*[E^*]$是G^*的支撑子图。由此得, T^*是G^*的支撑树。

(42) 设G具有$\nu\geqslant 4$的简单平面嵌入三角剖分, 证明G^*是简单2-边连通3-正则可平面图。

证: (1°) $\because G$显然无割边, $\therefore G^*$无圈, 又$\because G$的任意两个面至多有一条公共边,
$\therefore G^*$的任意二顶点间至多有一条边, 于是G^*是简单的。

(2°) $\forall f^*\in V(G^*)$, 显然有$d_{G^*}(f^*)=d_G(f)=3$, 即G^*是3-正则的。

(3°) $\because G$无圈, $\therefore G^*$无割边, 即G^*是2-边连通的。

因此, G^*是简单2-边连通3-正则平面图。

7.二分图(偶图)

(43) 证明: ①$\varepsilon(K_{m,n})=mn$;

②若G是简单的和二分的, 则$\varepsilon\leqslant\nu^2/4$。

证: ①由$K_{m,n}$的定义立即可得;

②设G的二分划为(X,Y), 且$|X|=m$, $|Y|=n$, 于是$|X|+|Y|=m+n=\nu$, 因为G是简单的和二分的, 故

$$\varepsilon\leqslant m\cdot n\leqslant\frac{m^2+n^2}{4}+\frac{m\cdot n}{2}=\frac{(m+n)^2}{2}=\frac{\nu^2}{4}.$$

(44) 证明: ①$\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$, 其中$k=[n/m]$;

②若G是有n个点的完备m—分图, 则 $\varepsilon[G]\leqslant\varepsilon(T_{m,n})$, 并且仅当$G\cong T_{m,n}$时等号成立。

证: ①令$\frac{n}{m}=\left[\frac{n}{m}\right]+\frac{r}{m}=k+\frac{r}{m}$, $0\leqslant r<m$, 则$r=n-mk$。此时, $T_{m,n}$的顶点分为m个子集, 有r个$k+1$个顶点, 有$m-r$个有k个顶点, 由$T_{m,n}$的定义知

$$\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n}{2}-(m-r)\binom{k}{2}-r\binom{k+1}{2}.$$

将$r=n-mk$代入并展开化简得:

$$\varepsilon(T_{m,n})=\frac{1}{2}(n^2-n+k^2m+km-2nk),$$

但 $$\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}=\frac{1}{2}(n^2-n-2nk+k^2m+km),$$

故 $$\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}.$$

②若$G\cong T_{m,n}$, 则G有m个顶点子集, 设它们的顶点个数分别为n_1, n_2, $\cdots$, n_m, 必有i

和 j 满足$n_i-n_j>1$，其中$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant m$，$i\neq j$。要证$\varepsilon(G)<\varepsilon(T_{m,n})$，只要证明顶点子集的顶点个数分别为$n_1$，$n_2$，…，$n_{i-1}$，…，$n_{j+1}$，…，$n_m$的图$G_1$，有比$G$更多的边即可，但

$$\varepsilon(G)=C_n^2-(C_{n_1}^2+C_{n_2}^2+\cdots+C_{n_m}^2)$$

$$\varepsilon(G_1)=C_n^2-(C_{n_1}^2+\cdots+C_{n_{i-1}}^2+\cdots+C_{n_{j+1}}^2+\cdots+C_{n_m}^2)$$

要证$\varepsilon(G)<\varepsilon(G_1)$，只要证明

$C_{n_i}^2+C_{n_j}^2>C_{n_{i-1}}^2+C_{n_{j+1}}^2$即可，但由$n_i-n_j>1$，易验证上式成立。

$\therefore\varepsilon(G)<\varepsilon(T_{m,n})$，显然当$G\cong T_{m,n}$时有$\varepsilon(G)=\varepsilon(T_{m,n})$，

$\therefore\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{m,n})$，并且仅当$G\cong T_{m,n}$时等号成立。

（45）证明 k-方体有2^K个顶点，$k2^{K-1}$条边且是二分图。

证：k 个分量由0和1组成的有序数组，由于每个分量有两种取法，故不同的数组只有2^K个，即k-方体有2^K个顶点。

和k-方体的每个顶点对应的数组，只有一个分量不同的数组显然有 k 个，于是k-方体的每个顶点有 k 条边和它关联，故k-方体的边数为$\frac{1}{2}(2^K\cdot k)=k\cdot 2^{K-1}$。令$X$为含有偶数个0的数组对应的$k$-方体的顶点集，令$Y$为含有奇数个0的数组对应的$k$-方体的顶点集，由$k$-方体的定义知$(X,Y)$是$k$-方体的一个二分划，故$k$-方体是二分图。

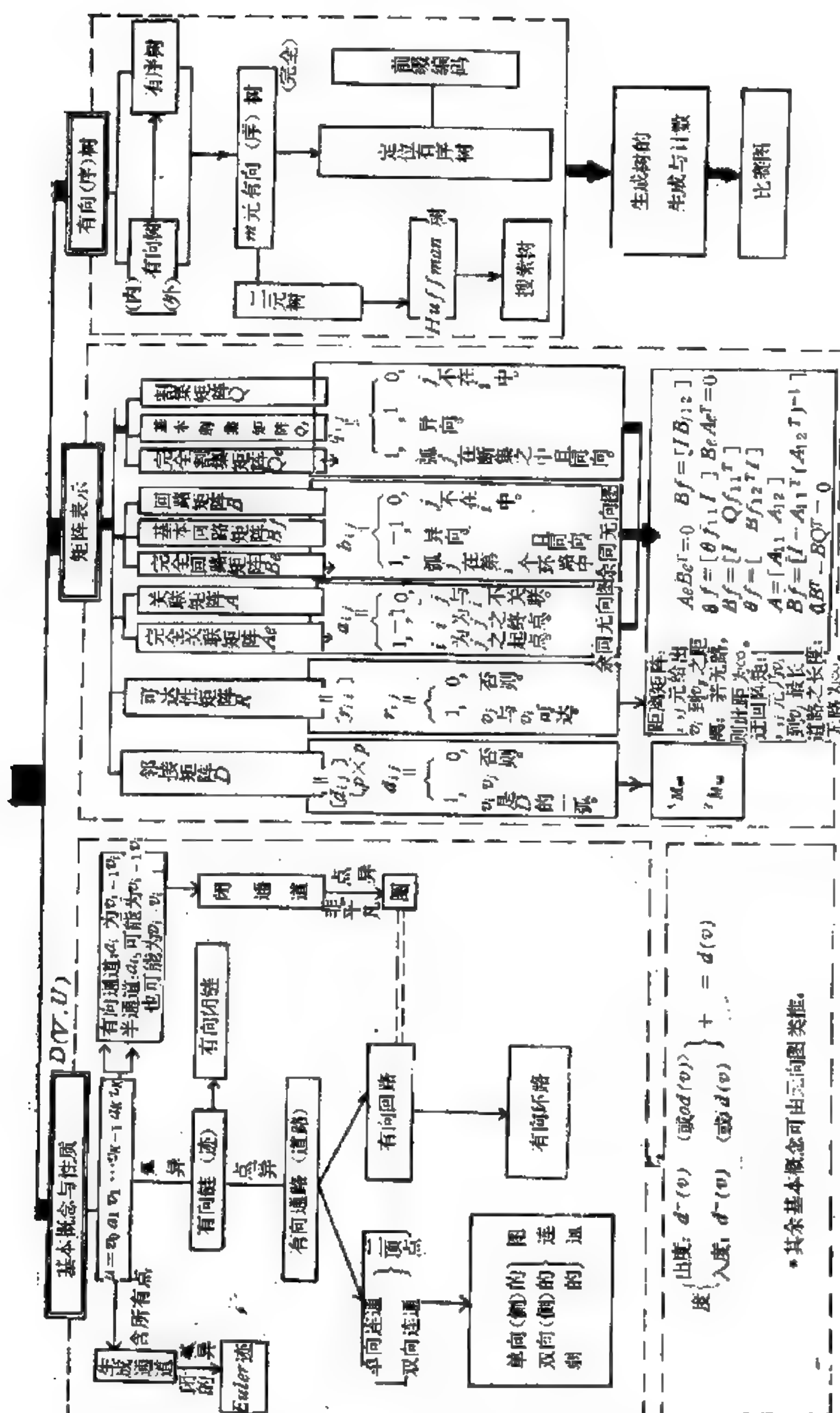
（46）证明一个无圈图G含有一个二分支撑子图H，使得$dH(v)\geqslant\frac{1}{2}d_G(v)$对一切$v\in V$成立。

证：设$V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$。设G是二分图，显然$H=G$，上面的不等式自然满足，否则不妨设$d_G(v_1)\geqslant d_G(v_2)\geqslant\cdots\geqslant d_G(v_n)$。显然$G$含有二分生成子图，这只要去掉一些边即可得，只有尽可能多的边的二分生成子图H，便有题中所求的性质。

因否则若有$v\in V$，使$d_H(v)<\frac{1}{2}d_G(v)$，则把去掉的与v联接的边保留。把保留的H中与v关联的边去掉得H'，显然H'仍是G的二分支撑子图且$\varepsilon(H')>\varepsilon(H)$与假设矛盾。

五、有 向 图

(一) 结　　构



基本概念与性质
矩阵表示
有向(序)树
有向树
有序树
前缀编码
定位有序树
搜索树
生成树的生成与计数
比赛图
有向闭链
有向回路
有向环路
* 其余基本概念可由无向图类推。

(二) 概　念

1. 基本概念和性质

（1）有向图：一个有向图D定义为一个偶对$D=(V, U)$。其中：（1°）V是一个非空集合，其元素称为顶点；（2°）U是有序积$V\times V$的一个子集，其元素称为弧。

（2）定向：给定一个图G，对于它的每条边，给它的两个端点指定一个次序（即给这条边指定一个方向）后，便得到一个有向图，这样的一个有向图，称为G的一个定向（定向图是唯一的）。

1－图：当一个有向图里两顶之间按一个方向最多只有一条弧时，称为1－图，记作$G=(X, \Gamma)$。

基础图：反之，对于一个有向图D，可以在相同顶点集合上作一个图G，使得对应于D的各条弧，G有一条相同端点的边，这个无向图G称为D的基础图（基础图对应的有方向图不是唯一的）。

（3）单侧连通：简单有向图G中，任何一对结点间，至少有一个结点到另一个结点是可达的。

强连通：简单有向图G中，任何一对结点两者之间是相互可达的。

弱连通：将G中各弧的方向略去，将它视为无向图后，图是连通的。

准强联：一个有向图$G=(X, U)$中，设在其上任取二顶点x与y，总在图里存在一顶点$Z(x, y)$，自Z到x与自Z到y均有路。

（4）W过程：设v是有方向图D的一个顶点，且$d^+(v)=0$或$d^-(v)=0$，我们把去掉与v相关联的所有的弧。称为去掉v的W过程。

（5）逆有向图：D的逆有向图D'与D的有同样的顶点，弧uv在D'中当且仅当弧vu在D中。

（6）源：D的一个源是一个顶点，它可达所有其余的顶点；

汇：一个汇是它的对偶概念。

（7）出树：一个出树是一个有向图，它有一个源而没有半圈。

入树：一个入树是出树的对偶。

（8）函数的有向图：一个函数的有向图是一个有向图，其中每一个点的出度等于1，

逆函数的有向图：一个逆函数的有向图是前者的对偶。

（9）点基：D的一点基是点的一个最小的集合，由它们可达所有的点。

1－基：是互相不邻接的点的一个最小的集合S，使D的每一个点或在S中，或由S中的一个点邻接（每一个有向图有一个点基，但并不都有1－基）。

2. 矩阵表示

（10）M_{od}：M_{od}是在$-D$中用$od(v_i)$来代替第i个对角线元素得到的矩阵。（M_{id}对偶地定义）。

3. 有向（序）树

（11）根：有向图D中任一顶点都可由某一顶点r到达，则称r为D的根。

（12）有向树：（树形图）若有向图D有一根a，且D的基础图是一棵树，则称D为以a为根的有向树（树形图）．

（13）叶：在有向树中，出度为零的顶点称为叶，其它顶点称为分枝顶点

（14）层数：由根到某一顶点v的通路的长，称为顶点v的层数．（图5.1）．

（15）有序树：若在有向树中规定了每一层数上的顶点的次序，这样的有向树称为有序树（图5.2）．

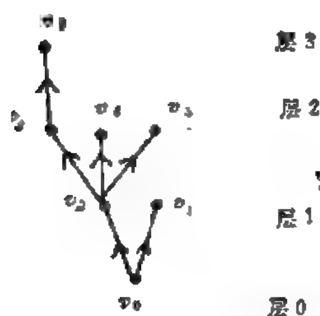


图5.1

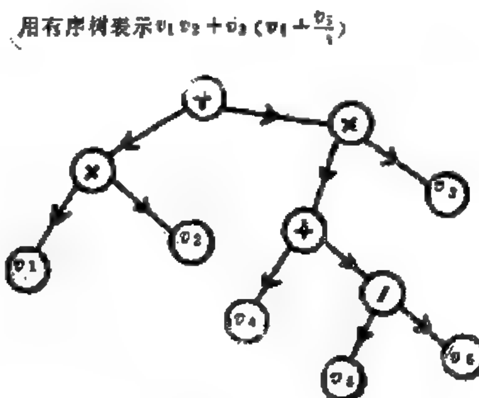


图5.2

（16）m元有向树（或m元有序树）：若在有向树（或有序树）中，每个顶点v，有$d^+(v)m$，则称此有向树（或有序树）为m元有向树（或m元有序树）。

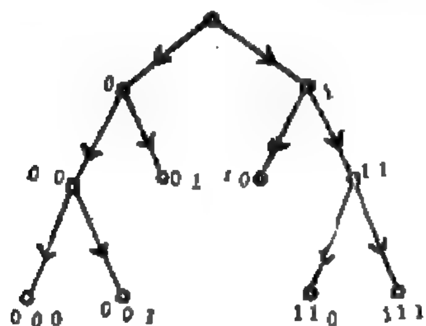
（17）完全m元有向（序）树：若对每个顶点v，有$d^+(v)=m$或$d^+(v)=0$，则称此有向（序）树为完全m元有向（序）树．

二叉树：指完全二元有序树．

（18）定位有序树：对于m元有序树，不仅每个顶点可能有m个儿子，而且每个儿子可能排在m个不同的位置上，称这样的有序树为定位有序树。

（19）前缀编码：对应于树的叶的编码集组成一个前缀编码（不同的定位二元有序树对应不同的前缀编码，这种表示方法是便于计算机的存储方式）（图5.3）．

（20）距离：设T_1、T_2是有图向D的两棵生成树，把在T_1中而不在T_2中的弧的数目称



前缀编码为{000，001，01，10，110，111．}

图5.3



$T_1=\{e,f,g,h\}\xrightarrow{T_1\oplus\{d,h\}}T_2=\{d,e,f,g\}$。

图5.4

为T_1和T的距离，记作$d(T_1, T_2)$ 。

（21）基本树变换：设E_0是由有向图D的两条弧组成的弧集，由$T_1 \oplus E_0 = T_2$所确定的从生成树T_1到生成树T_2的变换，称为基本树变换 。(图5.4)

（22）引进符号

①. $T_a = \{T_0 \oplus \{a, p\} | p \in S_a(T_0), p \neq a\}$.

②. $S^e(T)$：S是关于生成树T的基本割集，e是S中所包含的T中的树枝，$S^e(T)$表示这个基本割集，$S^e(T)$中不包含T中其它树枝。

③$T_{a_1 a_2 \cdots a_k} = \{T' \oplus \{a_k, p\} | p \in S_{a_k}(T') \cap S_{a_k}(T_0), T' \in T_{a_1, a_2 \cdots a_{k-1}}, p \neq a_k\}$。(其中$T_0 = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, $k \leqslant m$)。

（23）M-序列：若有序弧集$\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{ip}\}$的每个子集$\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{iq}\}$ ($q=1, 2, \cdots p$) 均由连通子图的弧集组成，则称此有序弧集构成M-序列。

（24）比赛图：一个比赛图是一个定向的完全图。

（三）定　　理

1. 基本概念和性质

（1）双向连通是有向图D的顶点集合$V(D)$的一个等价关系。

（2）设P是有向图D的一个子图，若

1°) $d^+(i)=1$, $d^-(i)=0$ 　　　　$i, j, \in V(p)$;

$d^+(j)=0$, $d^-(j)=1$

2°对任意的$v \in V(P)$，有$d^+(v)=d^-(v)=1$，则P是一有向(i, j)通路。

（3）设C是有向图D的一个子图，若

1°) 对任意的$v \in V(c)$，有$d^+(v)=d^-(v)$;

2°) 对任意的$v \in V(c)$，$d(v)=2$，则c是一条有向回路。

（4）设D是有向连通图，对任意的$v \in V(D)$，$d^+(v)=1$（或$d^-(v)=1$）$\Longrightarrow D$恰有一条有向回路。

（5）有向图D有有向回路$\Longleftrightarrow$存在一个所有顶点均满足$d^+(v)>0$和$d^-(v)>0$的子图。

（6）有向图D无有向回路$\Longleftrightarrow$能通过W过程去掉D中所有的边。

（7）一有向图是强连通的$\Longleftrightarrow G$中有一个回路，它至少包含每个结点一次$\Longleftrightarrow$它有一条生成闭通道；它是单侧的$\Longleftrightarrow$它有一条生成通道；它是弱的$\Longleftrightarrow$它有一条生成半通道。

（8）方向对偶原则：对于每一个关于有向图的定理有一个相应的定理，它由将每一个概念代以它的逆概念得到。

（9）一个无圈有向图D至少有一个点的出度等于零。

（10）一个无圈有向图D至少有一个点的入度等于零。

（11）一个有向图D的下列性质是等价的：

(1°) D是无圈的；(2°) D^*同构于D；(3°) D的每一条通道是一道路；(4°) 可将D的点编号，使邻接矩阵$D(D)$是上三角形的。

（12）一个弱有向图是一个出（入）树$\Longleftrightarrow$恰有一个点的入（出）度等于零0，而其余

点的出（入）度等于1。

（13）对于一个弱有向图，下列陈述是等價的：

（1°）D是函数的；（2°）D恰有一个圈，移去此圈的弧产生一个有向图，其中每一个弱支是一个入树；（3°）D恰有一个圈Z，移去Z的任何一条弧产生一个入树。

（14）每一个无圈有向图有唯一的一个点基，它由所有入度等于0的点组成。

（15）一个有向图D的每一个点基由D的构成D^*的点基的每个强支中的正好一个点组成。

（16）每一个没有偷圈或无圈的有向图都有一个1-基。

2. 矩阵表示

（17）D^n的i，j元$d_{ij}^{(n)}$是由v_i到v_j的长度等于n的通道的数目。

（18）D是一个有向图，D_i（$i=1$，…，n）是其线性子图，且D_i中有e_i个偶圈$\Longrightarrow$det

$$D_{(r)}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{e_i}.$$

（19）对任何一个标定有向图D，Mod的第i行中的任何一个元的余因子的值是以v_i为汇的生成入树的数目。

（20）Mod的第j列中任何一个元的余因子的值是以v_j为源的生成出树的数目。

（21）在一个Euler有向图中，Euler迹的数目等于

$$C\cdot\prod_{i=1}^{d}(d_i-1)!$$

其中，$d_i=id(v_i)$，C是Mod的所有余因子的公共值。

（22）可达性矩阵的元可由D的幂如下得到：

1°）对所有的i，$r_{ii}=1$；

2°）$r_{ij}=1\Longleftrightarrow$对某一个$n$，$d_{ij}^{(n)}>0$。

（23）令v_i是有向图D的一个点，D的含v_i的强支由矩阵$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^T$中的第$i$行（或列）中等于1的元所决定。

（24）距离矩阵的元可由D的幂如下得到：

1°）对所有的i，$S_{ii}=0$；

2°）$S(v_i, v_j)$是最小的使$d_{ij}^{(n)}>0$的n（若这样的n存在，否则为∞）。

（25）$\mathbf{A}_e$的铁是n_e-1。

（26）n_e阶有向连通图D的关联矩阵$\mathbf{A}$的一个大子阵，是非奇异的$\Longleftrightarrow$此大子阵之列对应D的一棵生成树的树枝。

（27）设$\mathbf{A}_1$是有向图D的关联矩阵$\mathbf{A}$的一个非奇异大子阵$\Longrightarrow\mathbf{A}_1$的行列式的值为1或$-1$。

（28）$\mathbf{B}_e$的铁为n_e-n_v+1。

（29）有向连通图D的回路矩阵$\mathbf{B}$的一个主子阵，是非奇异的$\Longleftrightarrow$该大子阵的列对应某生成树的连枝。

（30）基本回路矩阵$\mathbf{B}_f$是全单位模矩阵。

（31）$\mathbf{Q}e$的铁为n_v-1。

（32）基本割集矩阵是全单位模矩阵。

（33）回路矩阵和割集矩阵的所有非奇异的大子阵的行列式，分别具有相同的值。

3．有向（序）树

（34）设T_1和T_{K+1}是有向图D的两棵生成树，$d(T_1, T_{K+1})=K\Longrightarrow T_{K+1}$可从$T_1$经$K$次基本树变换而得到。

（35）设T_1和T_2是图D的两棵生成树，且距离为1，若$T_1-T_2=\{a\}$，$T_2-T_1=\{b\}$，则弧b在$S_a(T_1)$中；反之，若弧b在$S_a(T_1)$中，则$T\oplus\{a, b\}$是D的一棵生成树（可推广至p个生成树的情形）。

（36）设有生成树$T_0=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}\Longrightarrow$每一个和$T_0$距离为1的生成树恰在下列集合$Ta_1, Ta_2, \cdots, Ta_m$之一中。

（37）连通有向图D的生成树数目是

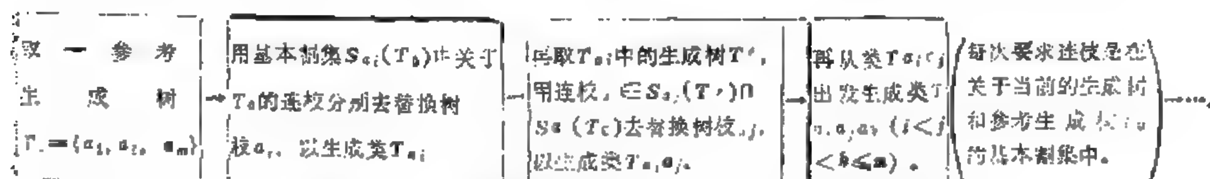
$$\det(\mathbf{AA}^T)$$

$\mathbf{A}$为D之关联矩阵。

（38）N阶完全图的生成树的个数是N^{N-2}。

（39）［附］生成树的生成过程：

设$T_0=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$是一棵生成树并称之为参考生成树，且设$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$是一个$M$-序列。



（40）每一个比赛图有一条生成道路。

（41）每一个有p个点的强比赛图，对$n=3, 4, \cdots, p$，有一个长度等于n的圈。

（42）一个比赛图是强的$\Longleftrightarrow$它有一个生成圈。

（43）由一个得分最大的点到其它任何一个点的距离等于1或2。

（44）一个得分序列$(S_1, S_2, \cdots, S_p)$的比赛图中可递三元组的数目等于$\sum S_i(S_i-1)/2$。

（45）在所有有p个点的比赛图中，循环三元组的最多数目等于$t(p, 3)$

$$=\begin{cases}\dfrac{p^3-p}{24} & (p\text{为奇数})；\\ \dfrac{p^3-4p}{24} & (p\text{为偶数})。\end{cases}$$

（46）有向图$G=(X, U)$是以a为根的树形图$\Longleftrightarrow$自顶点a通向其他各顶点有且仅有一条路。

（47）有向图$G=(X, U)$是树形图且以a为根$\Longleftrightarrow$图G无圈，且$d_G^-(a)=0$，$d_G^-(x)=1$ $(x\in X, x\neq a)$。

（48）有向图$G=(X, U)$有根$\Longleftrightarrow$图G是准强联的。

（49）有向图$G=(X, U)$有跨顶树形图$\Longleftrightarrow$图G为准强联的。

（50）已经单纯、无环联接图$G=(X, E)$，设$x_1\in X$是其任一顶点，总可将E中的每一

边定向，使成有向图$G_1=(X,U)$，在其中有部分图H是一个以x_1为根的树形图。

4. 有向图的Hamilton有向圈和通路

（51）一个无环的有向图D，最小出入度为K，顶点数为p。当$5\leqslant p\leqslant 2K$时，D中有弧不重的一个Hamilton有向圈和一个Hamilton有向通路。

（52）（Ghouila-Houri，[1960]）设无环图$G=(X,\Gamma)$是一个阶$n\geqslant 3$的强联1-图。若在每个顶点上有

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n$$

$\Longrightarrow G$有H-回路。

（53）（Nash-Williams，[1969]）设$G=(X,\Gamma)$是一个阶$n\geqslant 3$、无环的1-图，且

$$d_G^+(x)\geqslant\frac{n}{2}\quad,\quad d_G^-(x)\geqslant\frac{n}{2}\qquad(x\in X)$$

$\Longrightarrow G$有H-回路。

（54）设G是一个无环、阶$n\geqslant 3$的1-图，具有性质

$$d_G^+(x)\geqslant\frac{n+K}{2}\quad,\quad d_G^-(x)\geqslant\frac{n+K}{2}\qquad(x\in X)$$

其中K是一个整数：$0\leqslant K\leqslant n-1$

$\Longrightarrow G$中每一个K长的初级路含在一个H-回路内。

（55）设$G=(X,\Gamma)$是一个无环的1-图，具有性质

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n-1\qquad(x\in X)$$

$\Longrightarrow G$有H-路。

（56）设$G=(X,\Gamma)$是一个完全1-图$\Longrightarrow G$有H-路。

（57）比赛图$G=(X,\Gamma)$有H-路。

（58）设$G=(X,\Gamma)$是一个阶$n\geqslant 3$的无环的强联1-图。在图中任意去掉一顶点所得图仍保持强联，且

$$d_G^+(x)+d_G^-(x)\geqslant n+1\qquad(x\in X)$$

$\Longrightarrow$对每一对相异顶点a与b，在G里存在一条H-路以a、b为其端点（即H-路自a到b或自b到a）。

（59）设图$G=(X,\Gamma)$是一个n阶无环的1-图，具有性质

$$d_G^+(x)\geqslant\frac{n+1}{2}\quad,\quad d_G^-(x)\geqslant\frac{n+1}{2}\qquad(x\in X)$$

$\Longrightarrow$每一对顶点a与b之间有H-路相联。

（60）设有向图$G=(X,\Gamma)$是一个完全1-图（可能有环）。在图上任一点x_0具有下列性质

$$|\Gamma(x_0)-\{x_0\}|=\max_{x\in X}|\Gamma(x)-\{x\}|$$

$\Longrightarrow$称x_0是图的中心，且自这点到图上任一点有路，其长不超过2。

（61）（Cannion，[1959]）设有向图$G=(X,\Gamma)$是一个强联的完全1-图$\Longrightarrow G$有H-回路。

（四）题　解

（1）证明在有向图$D=(V,U)$中，

$$\sum_{v\in V} d^-(v)=\varepsilon=\sum_{v\in V} d^+(v)。$$

证：设G是D的基础图，则有

$$\sum_{v\in V(D)} d^-(v)+\sum_{v\in V(D)} d^+(v)=\sum_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon;$$

因D的每条弧对应且仅对应一个内半次和一个外半次，故有

$$\sum_{v\in V} d^-(v)=\sum_{v\in V} d^+(v)=\varepsilon。$$

（2）设D是没有单向回路的有向图，

①证明：$\delta^-=0$；

②推演：存在V的一个有序点列v_1、v_2、…、v_ν，使对于$1\leqslant i\leqslant\nu$，以v_i为头的D的每条弧在v_1，v_2，…，v_{i-1}中都有它的尾。

证：①用反证法。假设$\delta^-\neq 0$，即$\delta^-\geqslant 1$，亦即$\forall v\in V$至少有一条弧指向v。设这条弧为$a_1=(v_1,\ v)$，且$v_1\neq v$（否则有单向回路）。

$$\because d^-(v_1)\geqslant\delta\geqslant 1,$$

$\therefore$存在弧$a_2=(v_2,\ v_1)$且$v_2\neq v$，$v_2\neq v_1$（否则有单向回路）。

又$\because d^-(v_2)\geqslant\delta\geqslant 1$，

$\therefore$存在弧$a_3=(v_3,\ v_2)$且$v_3\neq v$，$v_3\neq v_1$，$v_3\neq v_2$（否则有单向回路）。

………………………………………………………………………………………………

继续做下去，由于顶点有限，故必出现一顶点与前面出现的某一顶点相同，即存在单向回路，矛盾。

②对ν归纳证明；

当$\nu=2$时，显然结论成立。

假设$\nu<n$时，结论成立；欲证$\nu=n>2$时，结论也成立。

事实上，由①得$\delta^-=0$，同理也有$\delta^+=0$。设$d(v)=\delta^+=0$，显然$D-v$没有单向回路，于是由归纳假设知$V(D-v)$存在一个有序点列v_1，v_2，…，$v_{\nu-1}$，使对于$1\leqslant i\leqslant\nu-1$，以$v_i$为头的每条弧在$\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{i-1}\}$中都有它的尾。

令$v_\nu=v$，则$V(D)$的有序点列v_1，v_2，…，$v_{\nu-1}$，v_ν也符合要求。

（3）证明：当且仅当D是连通的，且D的每一块是双向连通时，D是双向连通的。

证："$\Rightarrow$"设D是双向连通的，显然D连通；且设$D[V_1]$是D的任一块，现证$D[V_1]$是双向连通的。

$\forall u,v\in V$，由D的双向连通性知：在D中存在单向(u,v)-通路P。又由块的定义知：P不能通过割点，所以在$D[V_1]$中存在单向(u,v)-通路。由u、v的任意性可知$D[V_1]$是双向连通的。

"$\Leftarrow$"对D的块数归纳证明：当D仅有一个块时，结论显然成立。假设D有K个块时，结

论成立，欲证D有$K+1$个块时结论亦成立。

由前面二题解（20）得知：D中存在块D_1仅有一个割点v_1，去掉这个块便得到一个仅有K个块的连通有向图D_2，且每个块都是双向连通的。由归纳假设知D_2是双向连通的，又$D=D_1\cup D_2$，且$D_1\cap D_2=\{v_1\}$，以及D_1是双向连通的。故对于$\forall u,\ v\in V(D)$，若u、$v\in V(D_1)$或$u,v\in V(D_2)$，则由D_1和D_2的双向连通性知：在D中存在单向(u,v)-通路。否则不失一般性，设$u\in V(D_1)$，$v\in V(D_2)$，则在D_1中存在单向(u,v_1)-通路P_1，在D_2中存在单向$(v_1,\ v)$-通路P_2，于是P_1P_2便是D中一条单向(u,v)-通路。

因此，由u、v的任意性知D是双向连通的。

（4）设v_1，v_2，…，v_ν是有向图D的顶点，D的邻接矩阵是$\nu\times\nu$矩阵$\mathbf{A}=[a_{ij}]$，其中a_{ij}是以v_i为尾，以v_j为头的D的弧的数目。

证明：$\mathbf{A}^K$的(i,j)元素是D中长度为K的单向(v_i,v_j)-途径的数目。

证：对K归纳证明：

当$K=1$时，由A的定义知结论成立。

假设$K<n$时，结论成立，欲证$K=n$时，结论成立。

事实上$\mathbf{A}^K=\mathbf{A}^{K-1}\cdot\mathbf{A}$，设$\mathbf{A}^{K-1}=[b_{ij}]$，$\mathbf{A}^K=[c_{ij}]$，则$C_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{\nu}b_{il}a_{lj}$。

由归纳假设知：b_{il}是D中长度为$K-1$的单向(v_i,v_l)途径的数目，a_{lj}是D中以v_l为尾，v_j为头的弧的数目。

于是$C_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{\nu}b_{il}a_{lj}$是$D$中长度为$K$的单向$(v_i,\ v_j)$-途径的数目。

（5）设D_1，D_2，…，D_m是D的双向分支，D的凝结$\hat{D}$是一个具有m个顶点W_1，W_2，…，W_m的有向图，当且仅当D中存在一条尾在D_i中头在D_j中的弧时，$\hat{D}$中存在一条以W_i为尾、以W_j为头的弧。

试证：D的凝结$\hat{D}$不含单向回路。

证：用反证法，假设$\hat{D}$含有单向回路W_{i1}，W_{i2}，…，W_{iK}，W_{i1}对应于D中的双向分支：D_{i1}，D_{i2}，…，D_{iK}，D_{i1}。由$\hat{D}$的定义知：存在$v_1\in V(D_{i1})$，$v_1'\in V(D_{i2})$，使得$(v_1,\ v_1')\in A(D)$；存在$v_2\in V(D_{i2})$，$v_2'\in V(D_{i3})$，使得$(v_2,\ v_2')\in A\ (D)$，…………；存在$v_K\in V(D_{iK})$，$v_K'\in V(D_{i1})$，使得$(v_K,\ v_K')\in A(D)$。

对任意的$v\in V(D_{i1})$，$u\in V(D_{i2})$。设D_{i1}中的单向(v,v_1)-通路为P，D_{i2}中的单向$(v_1',\ u)$-通路为Q，则$P(v_1,\ v_1')Q$为D中的单向(v,u)-通路。

再设D_{i2}中的单向$(u,\ v_2)$-通路为P'，D_{i3}中的单向$(v_2',\ v_3)$-通路为P_3，D_{i4}中的单向$(v_3',\ v_4)$-通路为P_4，…，D_{iK}中的单向$(v'_{K-1},\ v_K)$-通路为P_K，D_{i1}中的单向$(v_K',\ v)$-通路为θ'，则$P'(v_2,\ v_2')P_3(v_3,\ v_3')P_4\cdots P_K(v_K,v_K')\theta'$为$D$中的单向$(u,v)$-通路。

即v，u属同一双向分支，这与v、u分属不同双向分支D_{i1}和D_{i2}矛盾。

（6）有向图D是单侧的，是指对于任意两个顶点u和v，或者v是从u出发可达到的，或者u是从v出发可达到的，试证：当且仅当有一个支撑单向路径时，D是单侧的。

证：“$\Rightarrow$”构造有向图D'，$V(D')=V(D)$，$\forall u,v\in V(D')$，$(u,v)\in A(D')$，当且仅当v从u出发是可达到的。故由D是单侧的可知：D'是一个比赛图。由定理可知D'含有单向

Hamilton通路，故D有一个支撑单向路径。

"$\Leftarrow$" 设D有一个支撑单向路径，则D中任意两点均位于一条单向路径上，于是D中任意两点间均有一条单向路径，因而D中任意两点间均有一条单向通路，即D是单侧的。

（7）①设D是$\chi>mn$的一个有向图，而f是定义在V上的一个实值函数。试证：D或者具有一条满足$f(u_0)\leqslant f(u_1)\leqslant\cdots\leqslant f(u_m)$的单向通路$(u_0, u_1, \cdots, u_m)$；或者具有一条满足$f(v_0)>f(v_1)>\cdots>f(v_n)$的单向通路$(v_0, v_1, \cdots, v_n)$。

②任意$mn+1$个不同整数的序列，或者包含m项的增加子序列；或者包含n项的减少子序列。

证：①设D_1和D_2是D的两个支撑子图，使得D_1的弧是D中$f(u)\leqslant f(v)$的那些弧(u, v)，而D_2的弧是D中$f(u)>f(v)$的那些弧(u, v)。

i）证明$\chi(D_1)>m$或$\chi(D_2)>n$。

用反证法证之。假设有$\chi(D_1)\leqslant m$和$\chi(D_2)\leqslant n$。$\because A(D_1)\cup A(D_2)=A(D)$,

$$A(D_1)\cap A(D_2)=\phi,$$

$\therefore \chi(D)\leqslant \chi(D_1)\cdot\chi(D_2)\leqslant mn$,

这与$\chi(D)>mn$矛盾。

ii）由定理知：或者D_1含长为$\chi(D_1)-1>m-1$的单向通路，或者D_2含有长为$\chi(D_2)-1>n-1$的单向通路，即D或者含有一条满足$f(u_0)\leqslant f(u_1)\leqslant\cdots\leqslant f(u_m)$的单向通路$(u_0, u_1\cdots u_m)$，或者含有一条满足$f(v_0)>f(v_1)>\cdots>f(v_n)$的单向通路$(v_0, v_1, \cdots, v_n)$。

③设D为$mn+1$个顶点上的比赛图，显然

$$\therefore \chi(D)=mn+1>mn.$$

令这$mn+1$个顶点上的实值函数值分别为这$mn+1$个不同的整数。于是由①知D或者具有一条满足 $f(u_0)\leqslant f(u_1)\leqslant\cdots\leqslant f(u_m)$

的单向通路$(u_0, u_1\cdots, u_m)$；或者具有一条满足 $f(v_0)>f(v_1)>\cdots>f(v_n)$

的单向通路$(v_0, v_1, \cdots, v_n)$。

即这$mn+1$个整数序列中，或者包含m项的增加序列，或者包含n项减少子序列。

（8）D的单向Euler环游是一条单向环游，它经过D的每条弧恰好一次。

试证：当且仅当D是连通的，并且对所有$v\in V$成立$d^+(v)=d^-(v)$时，D包含一条单向Euler环游。

证："$\Rightarrow$" 设D含单向Euler环游，并设C是D的一条单向Euler环游，u是C的起点C也是C的终点，显然D是连通的。

作为C的内部顶点v每出现一次就有两条弧与之关联；又C包含D的所有弧，故当$v\neq u$时有$d^+(v)=d^-(v)$。另外由于C开始并终止于u，故$d^+(u)=d^-(u)$，于是对所有的$v\in V$均有$d^+(v)=d^-(v)$。

"$\Leftarrow$" 用反证法证之。假设D连通且对任意的$v\in V$均有$d^+(v)=d^-(v)$，而D不含单向Euler环游，并设D是满足这样条件且使边数达到最小的有向图。

因D连通且对任意的$v\in V$有$d^+(v)=d^-(v)$，故$\max\{\delta^+, \delta^-\}\geqslant 1$。由定理："若$D$是狭义的，且$\max\{\delta^-, \delta^+\}=K>0$，则$D$含有一条长度至少为$K+1$的单向回路"。——得知$D$含有长度至少为2的单向回路，于是可设$C$是$D$中长度最大的一条单向闭链。

因D不含单向Euler环游，故$D-E(C)$中存在分支D'，使$\varepsilon(D')>0$；又因C含单向

Euler环游，故对任意的$v\in V(C)$有

$$d_C^+(v)=d_C^-(v),$$

于是对任意的$v\in V(D')$也有$d_{D'}^+(v)=d_{D'}^-(v)$．因$\varepsilon(D')<\varepsilon(D)$，故由$D$的选择得知$D'$有一条单向Euler环游$C'$；又因$D$连通，故$V(c)\cap V(C')\neq\phi$。

设$v\in V(c)\cap V(c')$並不失一般性设v是C和c'的起点和终点。于是，cc'就是使得$\varepsilon(c')>(c)$的一条单向闭链。这与C的选择矛盾，据此D含有单向Ewler环游。

（9）试证：包含奇回路的双向连通有向图D也包含单向奇回路。

证：设$v_1v_2\cdots v_{2k+1}v_1$是D的一条奇回路。若$(v_i, v_{i+1})\in A(D)$，则令$P_i=(v_i, v_{i+1})$。

若$(v_i, v_{i+1})\in A(D)$，则令$P_i=$单向(v_i,v_{i+1})-通路（因D双向连通）。

若存在某个P_i是偶数长度，则$P_i+(v_{i+1},v_i)$是D的一条单向奇回路。否则，$P_1P_2\cdots P_{2k+1}$是D的一条奇数长度的单向闭链。因单向闭链可分解为若干个路不重并的单向回路，于是其中至少有一条单向回路的长度是奇数（否则单向闭链的长将是偶数，引出矛盾）。

（10）一个非平凡有向图D是K-弧连通的，是指对于V的每个非空真子集S，均有$|(S,\bar{S})|\geq K$。试证：一个非平凡有向图是双向连通的充要条件是它为1-弧连通的。

证：“$\Rightarrow$”设非平凡有向图D是双向连通的。假设D不是1-弧连通的，即存在$S\subset V$，使得$|(S,\bar{S})|=0$，因$S\neq\phi$，$\bar{S}\neq\phi$，故存在$u\in S$，$v\in\bar{S}$且u，v间不存在单向(u,v)-通路，这与D是双向连通的矛盾。

“$\Leftarrow$”设D是1-弧连通的，即任意给定$S\subset V$，均有$|(S,\bar{S})|\geq1$。现证D是双向连通的用反证法证之。假设存在两顶点u和v，使得D中不存在单向(u,v)-通路，令S是D中存在单向(u,W)-通路的所有顶点W的集合。显然，$v\in\bar{S}$，$(S,\bar{S})=\phi$，故$|(S,\bar{S})|=0$，这与D是1-连通的，即任给$S\subset V$，均有$|(S,\bar{S})|\geq1$，矛盾。

（11）设S是n个字母的字母表。试证：存在一个包含每个字母的n^3个拷贝的循环序列，使由S的字母形成的每4个字母所组成的“字”都作为这个序列的一个块而出现。

证：①构造有向图D_4：顶点是S中的任意3个字母，每条弧都具有形式（ABC，BCD）于是，每条弧都对应S中的四个字母所组成的“字”。

②对于任意的$v\in V(D_4)$，均有n条弧指向v和n条弧离开v，故有

$$d^-(v)=d^+(v)=n.$$

于是，D_4包含一条单向Euler环游。又因$|V(D_4)|=n^3$，故$|A(D_4)|=n\times n^3=n^4$；所以S中每个字母在循环序列中均出现n^3次。

（12）证明树形图的所有顶点都是树根的后代。

证：设$v_0\in V(H)$，H是一个树形图，v_0是H的根。对任一$v_i\in V(H)$（$i\neq0$），显然由树形图的定义有唯一的一条弧以v_i为头，其尾设为v_{i_1}。若$i_1=0$，显然有v_i是根的后代；否则必有一弧以v_{i_1}为头，其尾设为v_{i_2}，因H不含有向回路，故$i_2\neq i$，若$i_2=0$，显然得证；否则必有一弧以v_{i_2}为头，其尾设为v_{i_3}．H不含有向回路，故有$i_3\neq i_1$，$i_3\neq i$．若$i_3=0$，显然得证；否则重复上述过程，因H的顶点数是有限的，必有$i_K=0$。于是，有v_0到v_i的有向通路存在，故v_i是v_0的后代。

（13）说明任意树形图都可以用一个二分树来唯一地表示之。

解：设H是具有n个顶点的树形图。若v_0是根，则将v_0的儿子用一水平线连起来，并将v_0与其最左边的儿子用一竖线连起来。设v_i的儿子分别为v_{i_1}，v_{i_2}，…，v_{i_k}（按从左到右的顺

序），则将v_{i_1}，v_{i_2}，…，v_{i_k}用一水平线连起来，并将v_i与最左边的儿子v_{i_1}用一竖线连起来，…。每边的定向为水平边自左向右、竖直边自上向下，然后将所得图以v_0为心按顺时针方向旋转45°，则可得一个具有n个顶点的顺序二分树。显然这种表示法是唯一的（如图5.5）。

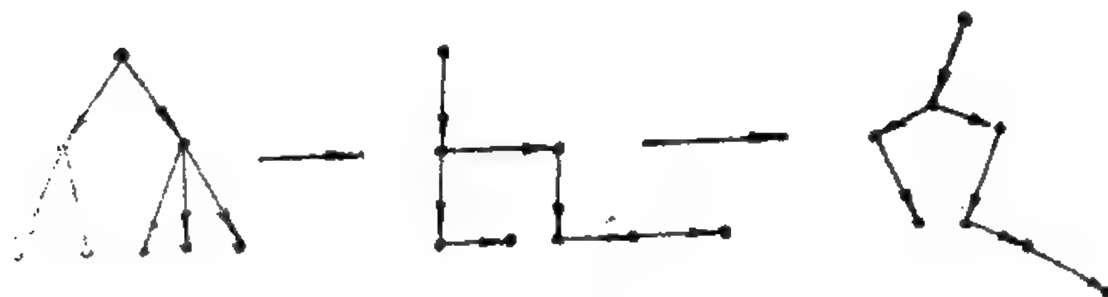


图5.5

（14）已知某图书馆共存书100万册，其中属A类50万册，B类20万册，C类5万册，D类10万册，E类15万册，试用构造最小二分树的方法，设计一种方案，将图书尽快分类。

解：对权列50、20、5、10、15构造一个最小二分树为（如图5.6）；

故将图分类的方案应为（如图5.7）。

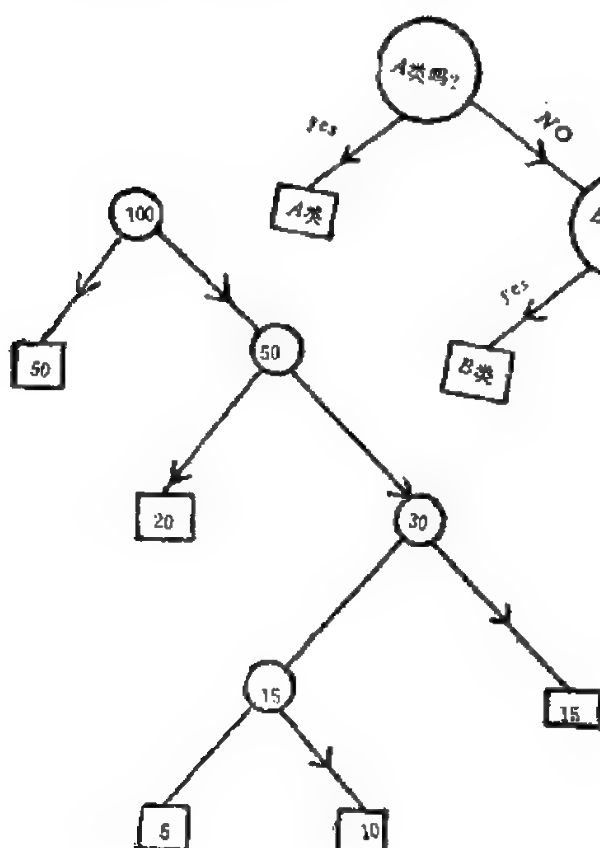


图5.6

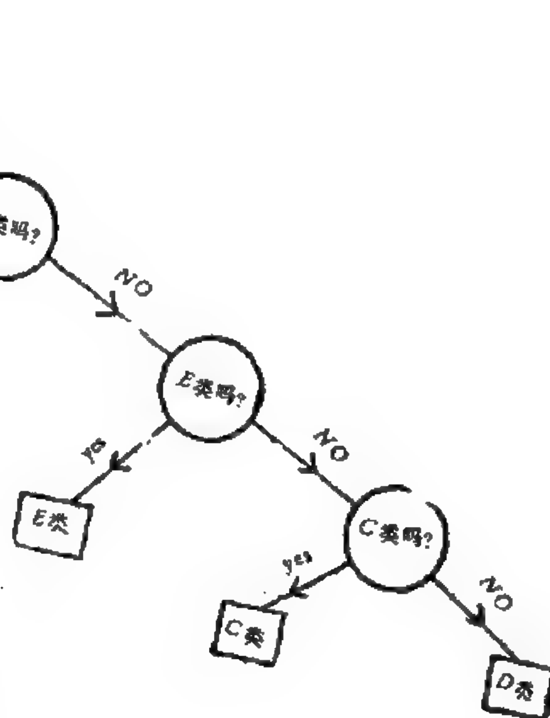
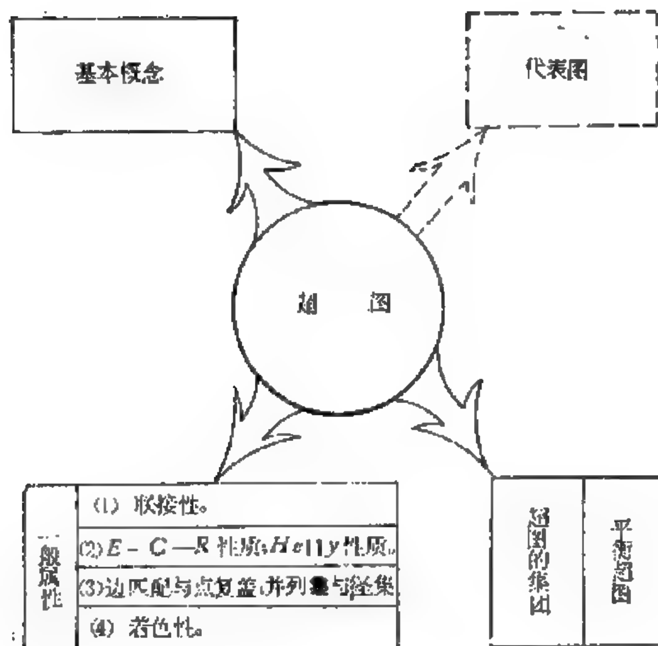


图5.7

六、超　图

（一）结　　构



（二）概　　念

1.基本概念

（1）超图：设 $X=\{x_1, x_2\cdots, x_n\}$ 是 n 个顶点的有限集．X 的某一子集被称为一条边 E_i．若 $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$，则称 $\mathscr{E}=\{E_1, E_2, \cdots E_m\}$ 为边集．称图 $H=(X, \mathscr{E})$ 为超图．

（2）相邻：在超图 H 中，若二顶点共边，则此二顶点称为相邻；若二边有公共顶点，则此二边也称为相邻．

（3）对偶超图：若一个超图取原超图 H 的顶点为边，取原超图 H 的边为顶点，而不改变顶边结合关系，这样的超图称为原超图的对偶超图，记作 H^*．

（4）秩函数：已给超图 $H=(X, \mathscr{E})$，在 Z 中任取子集 $S\subset X(S\neq\phi)$，函数

$$r(S)=\max_{i}|S\cap E_i| \qquad (E_i\in\mathscr{E})$$

称为超图 H 的秩函数．

秩：当$S = X$时，

$$r(X) = \max_i (X \cap E_i) \qquad (E_i \in \mathscr{E})$$

称为超图H的秩（它是超图H中边所含顶点的极大个数）。

（5）部份超图：在$\mathscr{E}$中任取子集$\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$，用$\mathscr{F}$做为边集构成超图$H_{\mathscr{F}} = (X_{\mathscr{F}}, \mathscr{F})$，其中$X_{\mathscr{F}} = \bigcup_{E_i \in \mathscr{F}} E_i$，则$H_{\mathscr{F}}$称为超图$H$的部份超图。

（6）k-截：超图H的k-截定为

$H_k = (X, \mathscr{E}_k)$。

H_k仍是一个超图，其顶点集仍为X，其边集则是原来的每一边上取不超过k个点的做边。

k-截H_k的秩函数为：

$r_k(s) = \min\{K, r(s)\}$。

（7）图$(H)_2$：在2-截H_2上舍弃每一顶点上的环便得一简单图，其每一边只含2-顶，这样的图记作$(H)_2$。

（8）极大边：在超图里一条边E_0不被其它的边所包含，则称此边为极大的。

（9）保形的：在H里有极大边集$\mathscr{E}_{max}$，在$(H)_2$里也有集大团集$\mathscr{C}_{max}$，若H与$(H)_2$有关系$\mathscr{E}_{max} = \mathscr{C}_{max}$，则超图$H$叫做保形的。

（10）一致（均匀）超图：每边含有同样多的顶点．（或称每边都满秩），通常说的简单图是秩-2的均匀超图。

（11）度：$H(X, \mathscr{E})$中每一顶点x所关联的边的数目称为顶点x的度，记作$\deg_H(x)$。

（12）正则超图：每一个顶点度均相等的超图称为正则超图．（显然r-均匀超图的对偶超图必是r正则图）。

（13）简单超图：没有多重边的超图．即对任意的i、j，只要$i \neq j$，都有$E_i \neq E_j$。

（14）导出子超图：由$H = (X, \mathscr{E})$的顶点集X的子集A唯一决定出一个子图H_A，它的顶点集为A，当$\mathscr{E}$中的边完全由A中顶点所组成时，取为H_A中的边。

2.超图的链和圈

（15）联接：若超图H上有链起于顶点a，止于顶点b，便记作$a \equiv b$（可证"$\equiv$"是一个等价关系），此时称a到b的联接的．若在超图H上任取二顶点x、y，总有$x \equiv y$，则H称为是联接的。

（16）联接的分子图：由于等价关系，使可将任一超图H分成若干个等价部分，称为超图的联接的分子图。

（17）链与圈：设在超图$H = (X, \mathscr{E})$里存在一个点边序列

$\mu = (x_1 E_1 x_2 E_2 \cdots E_q x_{q+1})$，

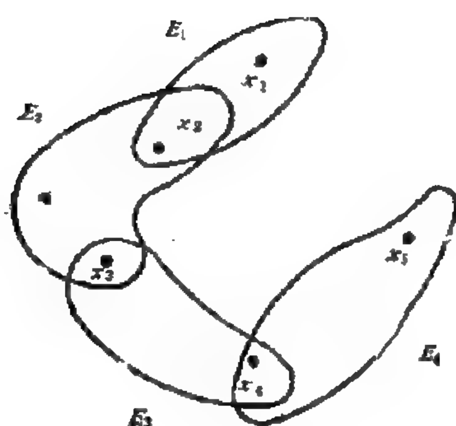
其中x_i是H的相异顶点，E_i是H的相异边，且

$x_k, \ x_{k+1} \in E_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, q)$

序列μ中共含q个相异边，若$x_{q+1} \neq x_1$，序列μ是H的一条（初级）链，其长为q；若$x_{q+1} = x_1$，序列μ便是H的一条（初级）圈，其长为q。（如图6.1）

3.E-C-R性质；Helly性质

（18）从：H有一个部分子超图H'，若H'的任二条边都相邻，则H'被称为H的一个从。



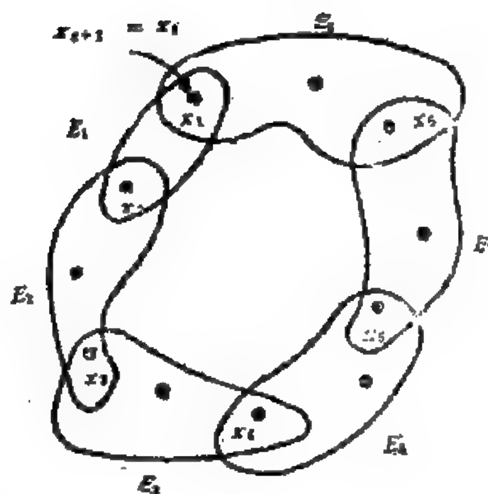


图6.1

(Bundle子图)。

(19) 星：一个丛，若它的全部边都有一个公共点，则这个丛可以称为一个星。

(20) 丛度：超图H中存在边数最多的丛，这个边数定义为丛度。记作$\Delta_0(H)$。

(21) $E\cdot C\cdot R$性质：若一个超图的最大丛的边数$\Delta_0(H)$达到最小值，也即等于最大点度，称H具有$E\cdot C\cdot R$性质。

(22) Hally性质：超图H若其每一个丛都是星，也即任何一个两两相交的边子集均有一个共同的交点，则称H具有Hally性质。

(23) 区间超图：顶点集X为直线上点集，边为直线上的包含着X内若干点的一个连续闭区间，这样的超图称为区间超图。

4. 超图的并列集与径集

(24) 并列集：已给超图$H=(X,\ \mathscr{E})$，设边的集合$\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}$，其中无二边相邻，则这个边集$\mathscr{E}'$称为超图$H$的并列集。

极大并列集：可能有并列集，含最多的边数，称为极大并列集。

(25) 先作一个边的交错序列

$$\sigma=(F_1,E_1,F_2,E_2\cdots,F_i,\cdots),$$

其中　$F_i\in\mathscr{F}=\mathscr{E}-\mathscr{E}_0$，$E_i\in\mathscr{E}_0$

满足下列条件：

i) $F_1\in\mathscr{F}=\mathscr{E}-\mathscr{E}_0$，$F_1$是任选的。

ii) 设已有奇交错序列$\sigma_i=(F_1,\ E_1,\ F_2,\ E_2,\ \cdots,\ F_i)$，选取$E_i$，使

a) $E_i\in\mathscr{E}_0-\sigma_i$，

b) $E_i\cap\bigcup\limits_{j\leqslant i}F_j\neq\phi$。

取此E_i，以扩大交错列σ_i。

iii) 设已有偶交错序列

$$\sigma=(F_1,E_1,F_2,E_2,\cdots,F_i,E_i)$$

选F_{i+1}，使

a) $F_{i+1}\in\mathscr{F}-\{F_1,F_2,\cdots,F_i\}$，

b) $F_{i+1} \cap \bigcup_{j<i} E_j \neq \phi$,

c) $F_{i+1} \cap \bigcup_{j\leq i} F_j = \phi$.

用F_{i+1}来扩大交错列σ。

视σ里所含元素的个数是奇数或偶数，分别称这个交错列是奇的或偶的。设不能再有满足ii）或iii）的E_i与F_i选进σ，即已不能再按上述规律将σ加以扩大，则这个交错列称为是极大的。

（26）径集：已给超图$H=(X,\mathscr{E})$，取顶点集$T\subset X$，设T满足条件

$T\cap E_i\neq\phi$（对一切$i\in I$均成立）则T称为超图H的径集。

径集数：在所有的径集中，有一个其维极小，这个极小的数称为超图H的径集数，记作

$\tau(H)=\min|T|$.

（27）吸收集：已给一个简单图$G=(X,E)$，所谓G的吸收集，乃其顶点集的一个子集：$A\subset X$，对每一顶点$x\notin A$，恒有边E，取x为一个端点，其另一端点在A内，这样的顶点集A称为图G的吸收集；维数极小的称为极小吸收集；极小数称为图G的吸收数，记作$\beta(G)=\min|A|$.

（28）边匹配（边独立集）：任二边都不交的边子集。

最大匹配数：最大匹配中边的条数称为最大匹配数，记作$\nu(H)$.

（29）点复盖（横贯集·点独立集）：超图顶点集X的一个子集T，且超图的每一条边都至少有一个点落在T内．即$T\cap E_i\neq\phi$ $(i=1,\cdots,m)$．

最小复盖数：点数最少的复盖，它的基数$\tau(H)$称为最小复盖数记为$\tau(H)$.

（30）könig性质：满足$\nu(H)=\tau(H)$的超图，称为具有könig性质。

（31）全单模阵：一个矩阵的所有子方阵行列式只有0，±1称为全单模阵。

单模超图：邻接阵是全单模的超图称为单模超图．

（32）τ-临界的：已知超图$H=(X; E_1,E_2,\cdots,E_m)$，设$H$满足条件

$\tau(H-E_i)<\tau(H)$

对一切$i=1, 2, \cdots, m$均成立，则H称为是τ—临界的．

5.超图的着色

（33）点着色：已给超图$H=(X,\mathscr{E})$，用多种颜色将H的顶点着色，使同一边$E_i(|E_i|>1)$上的诸点不全是同一种色，这就是所谓的超图的点着色．（超图H相邻接的边染不同色，称正常染色）。

（34）点色数，如上所用的最少种颜色称为超图H的点色数．记作$\chi(H)$．（正常染色所需最少的色的种数，叫做边染色数，或色指标、色指数，记作$\chi'(H)$）．

（35）稳固的：设在超图H里取顶点集$S\subset X$，使在S里不含任何边E_i，其中$|E_i|>1$，则S称为是稳固的。

稳固数：极大的稳固集S，其维$|S|$称为H的稳固数。

（36）H是可-q-着色：将超图H的顶点作q个稳固集的划分，每一稳固集中的点可染以一种颜色，则q种颜色便足以涂染H的顶点，使同一边上的顶点不同色，此时称H为可-q-着色。

6. 超图的代表图

（37）代表图：已给超图$H=(E;X_1,X_2,\cdots,X_n)$，取H的边做顶点$x_1, x_2, \cdots, x_n$；当且仅当两边$X_i\cap X_j\neq\phi$时，始将x_i与x_j联边，得图G，这个图称为超图H的代表图，记作$G=L(H)$。

7. 超图的集团

（38）r秩集团：已给超图$H=(X,\mathscr{E})$，设H是h秩的，取$r<h$，在X里任取子集$A\subset X$，或者$|A|<r$，或者$|A|\geqslant r$。在后一情况，在A中任取r个相异元素，这r个元素至少恒在H的一条边内，则A称为超图H的r秩集团。

（39）r秩完备的：设超图H的顶点集X本身就是一个r秩集团（即在H里任取r个点，恒有边含此r点），则H称为是r秩完备的。

（40）集团：设超图H是h秩匀称的一个h秩集团，简称为一个集团。

8. 平衡超图

（41）平衡超图：已给超图$H=(X,\mathscr{E})$，设其每一奇圈

$$\mu=(x_1E_1x_2E_2\cdots x_{2p+1}E_{2p+1}x_1)$$

上总有边，含圈上的三个顶点，则这样的超图称为平衡超图。

（42）强稳固集：设$H=(X,\mathscr{E})$为一超图，其秩函数为$r(S)$，一个集合S若具有性质：$r(S)=1$，即对$1\leqslant i\leqslant m$均有，$|S\cap E_i|\leqslant 1$成立，则称S为强稳固的。

（43）强稳固数$\alpha(H)$：强稳固集所可能具有的极大顶点数。

复盖数$\rho(H)$：可复盖H的所有顶点的最少边数。

（44）强q-着色：超图H的强q-着色定义为H的顶点的一个q-着色，它使得含于同一边的任二顶点均有不同的色。（显然，任一强q-着色均是其顶点集X的一个划分为q-个强稳固集的划分。）

强色数$\gamma(H)$：是使得对H进行强q-着色成为可能的最小正整数q。

（三）定　　理

1. 基本概念

（1）超图H是保形的$\Longleftrightarrow$图$(H)_2$的每一集团，都含在H的一条边内。

（2）超图H是保形的$\Longleftrightarrow$对于H的任意三条边E_1、E_2、E_3，总能找到H的另一条边E使得$E\supset(E_1E_2)\cup(E_2,E_3)\cup(E_3E_1)$。

2. 超图的链和圈

（3）超图$H=(X,\mathscr{E})$含n顶点、m条边、p个联接的分子图$\Longrightarrow H$无圈的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1)=n-p$$

（4）超图H是联接的$\Longrightarrow H$无圈的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1)=n-1.$$

（5）设$H=(X,\mathscr{E})$是一个超图，其中

$\mathscr{E} = \{E_i/i \in I\}$

$\Longrightarrow H$不含圈的充要条件是

$$\left|\bigcup_{j\in J} E_j\right| > \sum_{i\in J}(|E_i|-1) \qquad (J\subset I,\ J\neq\phi)$$

对一切$J\subset I$均成立。

(6) 超图$H=(X,\mathscr{E})$无孤立点，具p个联接的分子图，含n个顶点和唯一一个圈

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1)=n-p+1.$$

3. E-C-R性质；Helly性质

(7) H具有边着色性质$\Longrightarrow H$必有E-C-R性质。

(8) $h\leqslant\frac{n}{2}\Longrightarrow h$-均匀完备超图$K_n^h$具有$E$-$C$-$R$性质。

(9) Chavatal猜想：每一个超图的传递闭包$\hat{H}$具有E-C-R性质。(即最大丛的边数=最大度)。

(10) Chavatal猜想在如下六个方面得到证实：

①简单图G有边着色性$\Longrightarrow$也有E-C-R性质；

②当$h\leqslant\frac{n}{2}$时$\Longrightarrow K_n^h$有E-C-R性质；

③H是具有边着色性$\Longrightarrow H$有E-C-R性质；

④sterboul (1977)：当H是3均匀超图时$\Longrightarrow H$有E-C-R性质；

⑤sterboul (1977)：当H的边数等于3（但点数不限）$\Longrightarrow\hat{H}$有E-C-R性质；

⑥当H的任三条边的交非空时$\Longrightarrow\hat{H}$有E-C-R性质。

(11) 一个图有Helly性质$\Longleftrightarrow G$不含三角形。

(12) 超图H具有Helly性质$\Longleftrightarrow$对于H的任意3个顶点x_1、x_2、x_3，至少包含其中二个顶点的边族，它们的交不空，或表为式子：至少有点x使得

$e_{x_1x_2}\cap e_{x_2x_3}\cap e_{x_1x_3}\ni x$，

其中e_{xy}表示过点x、y的族的全体。

(13) 区间超图具有Helly性质。

(14) 具有Helly性质的超图$\Longrightarrow$必具E-C-R性质。

(15) 超图H具有Helly性质$\Longleftrightarrow H^*$具有保形性。

4. 超图的并列集与径集

(16) 在超图$H=(X,\mathscr{E})$里，并列集$\mathscr{E}_1$是极大的$\Longleftrightarrow$不存在关于$\mathscr{E}_1$的极大奇交错列。

(17) 已知$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，设

$\mathscr{A}=(A_i/i\in I)$，$\mathscr{B}=(B_j/j\in J)$，

其中 $A_i\subset X$，$B_j\subset X$。

即$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是两个X的子集的集合，令

$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}=(A_i\cup B_j/(i,j)\in I\times J)$

$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}=(A_i\cap B_j/(i,j)\in I\times J)$

再取符号

$\ddot{\mathscr{A}}$：$\mathscr{A}$的所有径集所成的集合；

$C|\mathscr{A}$：至少包含一个$A_i\in\mathscr{A}$的一切集的集合；

$\min\mathscr{A}$：$\mathscr{A}$的极小集所成的集合；

$Tr\mathscr{A}$：$\ddot{\mathscr{A}}$的极小集所成的集合。

$\Longrightarrow$①$Tr\mathscr{A}=\min\ddot{\mathscr{A}}$，$\ddot{\mathscr{A}}=C|Tr\mathscr{A}$；

②$\ddot{\mathscr{A}}=C|\ddot{\mathscr{A}}=(C|\ddot{\mathscr{A}})$；

③$C|\mathscr{A}=C|\min\mathscr{A}$；

④ $(\ddot{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}})=\ddot{\mathscr{A}}\cap\ddot{\mathscr{B}}$；

⑤$\min(C|\mathscr{A}\cap C|\mathscr{B})=\min(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$；

⑥$Tr(\mathscr{A}\cup\mathscr{B})=\min(Tr\mathscr{A}\vee Tr\mathscr{B})$

(18) H是一个超图$\Longrightarrow\nu(H)\leqslant\tau(H)$。

(19) H是一个具有秩$Y(X)=h$的超图$\Longrightarrow$

$\tau(H)\leqslant h\nu(H)$。

(20) (Jaeger, Payan[1971])：设$H=(X,\mathscr{E})$是一个h秩τ-临界超图，其$\tau(H)=k+1\Longrightarrow H$的边数小于或等于$\binom{h+k}{h}$，对于超图$(X,\mathscr{E})$，其$|X|=h+k$，$\mathscr{E}=\mathscr{P}_h(X)$，则等号成立。

(21) 对于超图H：

①任一个匹配和任一个复盖都有

$$|H'|=|T|;$$

②$\nu(H)\leqslant\tau(H)$。

(22) 区间超图具有König性质。

(23) (Edmonds, 1972)：没有奇回路的超图一定是单模超图，(反之不一定)。

(24) 单模超图具有König性质。

(25) $a|b$时，$a\times b$砖装满$p\times q$棋盘$\Longleftrightarrow a|p$，$b|q$。

若$a<b$，$a\nmid b\Longrightarrow$总存在$p\cdot q$，使得$a\cdot b$、$p\cdot q$定义的超图不满足König性质。

(26) (Barnilt-kynech, singmastei, 1967) 用$W_{1b}(pq)$表示在$p\cdot q$个格的矩形棋盘上，尽量放$1\times b$骨牌·最后剩下的面积公式：

$$W_{1b}(pq)=\begin{cases}r\cdot s, & 当r+s\leqslant b;\\ (b-r)(b-s), & 当r+s\geqslant b.\end{cases}$$

这里$p\equiv r(\bmod b)$，$q\equiv s(\bmod b)$。

(27) (Holt on, Rickard, 1978)：$p\cdot q\geqslant 3b$

$\Longrightarrow$

$$W_{2b}(pq)=\begin{cases}W_{1b}(pq) & ，当pq-W_1b\equiv1(\bmod 2);\\ W_{1b}(pq)+b, & 当pq-W_1b\equiv1(\bmod 1).\end{cases}$$

5. 超图的着色

(28) (Tomescu[1968])设$(s_1, s_2, \cdots, s_q)$是超图H的一个q-着色，并设

$$d_s = \max_{x \in S} d_H(x)$$

$\Longrightarrow \chi(H) \leqslant \max_{k \leqslant s} \min\{k,\ d_{k+1}\}$。

(29) 设H是一个超图，其$\chi(H)=q+1$，再设在超图H中去掉顶点x_0所得超图为H_0，其$\chi(H_0)=q \Longrightarrow d_H(x_0) \geqslant q$。

(30) 设H是一个超图，q是一个正整数，满足条件

$$|\{x \mid x \in X,\ d_H(x) \geqslant q\}| \leqslant q,$$

即指$d_H(x) \geqslant q$的顶点x的个数不超过q

$\Longrightarrow \quad \chi(H) \leqslant q$。

(31) 设H是一个超图，其顶点的极大次是d_s

$\Longrightarrow \quad \chi(x) \leqslant d_s + 1$。

(32) (Motzkin[1968]) 设G是一个简单图，其极大次是$h \Longrightarrow$ 可用$\left[\frac{h}{2}\right]+1$种颜色，将其顶点染色，使没有一个圈里的顶点具有同一种颜色。

(33) 已给简单图$G=(X,\ E)$，若

$$q = \max_{[a,\ b] \in E} \min[d_G(a),\ d_G(b)]$$

$\Longrightarrow$其边可以q-着色，使每个圈上的边不具同一种颜色。

(34) (Shannon, 1949) $\rho \leqslant \chi'(G) \leqslant \left[\frac{3}{2}\rho\right]$。($\chi'$为色指标，$\rho$为$G$的最大度)。

(35) (Vizings, 1964) $\rho \leqslant \chi'(G) \leqslant \rho + 1$。

(36) (Gupta, 1967; Hilton, 1975) 设多重图M边的最大重复度记作$\mu \Longrightarrow$

$\rho \leqslant \chi'(M) \leqslant \rho + \mu$。

(37) (Beineke, Wilson, 1973) G有n个顶点，最大度为ρ且$m > \rho \cdot \left[\frac{1}{2}n\right]$

$\Longrightarrow G$属第2类。

(注：图按边色数分成二大类：第一类，$\chi'(G)=\rho$；第二类，$\chi'(G)=\rho+1$)。

(38) 推论：

①点数为奇数的正则图$\Longrightarrow$是第2类的；

②奇数个顶点ρ正则图H，由H至多删去$\frac{1}{2}\rho-1$条边而得的子图$G \Longrightarrow G$属第2类。

③偶数个顶点ρ正则图H，由H的任一条边上新加一个点而得到图$G \Longrightarrow G$属第2类。

④奇图C_{2k+1}，存在若干k条边的边独立集，至多加上$2k-2$个k边的独立集$\Longrightarrow$得到的图G也属第2类。

⑤G是含有一个割点的正则图$\Longrightarrow G$属第2类。

(39) 任一简单图的闭包图G属第一类。

(40) 超图中$\chi'(H) \leqslant \rho+1$不成立。

(41) (Lucas) $2p$个女生，存在一种配对方案来按排$2p-1$天的散步，使每个女生恰好与所有其它女生一起散步一次。即完全图K_{2p}存在$2p-1$的正常着色。

(42) (Kirkman女生问题.1950) 15名女生散步。每天一次，每3人一组，分成5组。

问可否在7天之内，使每二个女生在3人组内相遇且恰相遇一次。即对15个顶点的3-均匀超图进行边着色。

（43）（D.R.Ray-chaudhar, R.M.Wilson, 1971］$n=6p+3$的n个点的3—一致超图，可以构造出一个2—截口是完全图K_n的3—一致完全超图，且可用$\frac{n-1}{2}$种颜色，每色$\frac{6p+3}{3}=\frac{n}{3}$条边，构成超图的正常边着色。

6．超图的代表图

（44）设G是一个简单图，具顶点集X，再设 E_1，E_2，$\cdots E_m$ 是X的一个子集族，具下列性质：

①每一E_i是G的一个集团（即E_i中每二点的联线都是G的边）；

②G的每个顶点和每条边至少被一个E_i所复盖$\Longrightarrow G$是超图$H^*=(X;\ E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_m)$的对偶图$H$的代表图。

反之，设G是超图$H=(E;\ X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$的代表图，则$H$的对偶图$H^*=(X;\ E_1,\ E_2,\cdots,E_m)$满足特性①和②。

（45）已给图$G=(X,\ E)$，其中$X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$，无孤立点，将图$G$的边$[a,b]$作为顶点，当且仅当二边$[a,\ b]$、$[x,\ y]$的顶点集$[a,b,\ x,y]$在$G$里不构成一个集团时，联此二顶点，得图$\bar{G}\Longrightarrow$取$G$为代表图的超图，其极小阶$\Omega(G)=$图$\bar{G}$的色数$\gamma(\bar{G})$。

（46）设G是一个简单图，无孤立顶点，也无三角形，但具m条边$\Longrightarrow$以G为代表图的超图H，其极小阶$\Omega(G)=m$。

7．超图的集团

（47）设H是一简单的h秩匀称的超图，再设K是一个具有k个顶点的集团，$k\geqslant h\Longrightarrow K$的每一顶点，其次数是

$$d_k=\left[\frac{k-1}{h-1}\right],$$

且由K产生的子超图H_k，其着色数

$\chi(H_k)=d_k+1$。

8．平衡超图

（48）平衡超图具有如下特性：

①平衡超图的任一部分超图H'仍是平衡的；

②平衡超图的任一子超图$H'\Longrightarrow$是平衡的；

③$H=(E_i/i\in I)$是一个平衡超图，E_0是一个集合$\Longrightarrow$超图$(E_i\cup E_0/i\in I)$也是平衡的；

④$H=(E_i/i\in I)$是平衡的，$x_1\in\bigcup_{i\in I}E_i\Longrightarrow$超图$H'(E_1\cup\{x_1\},E_2,\cdots,\ E_m)$也是平衡的；

⑤超图$H=(X,\mathscr{E})$是平衡的，$x_1\in X$，对H增加一个新点x_1'如下，得超图$H'=(X',\mathscr{E}')$，其中　$X'=X\cup\{x_1'\}$，

$$E_i'=\begin{cases}E_i, & 若x_1\notin E_i,\\ E_i\cup\{x_1'\}, & 若x_1\in E_i.\end{cases}$$

$\Longrightarrow H'$是平衡的；

⑥$H=(X,\mathscr{E})$ 是平衡的$\Longrightarrow$其对偶图 $H^*=(e_1,\cdots,e_m;X_1,\cdots,X_n)$ 也是平衡的。

⑦超图 $H=(E_i/i\in I)$ 是平衡的，并设在部分超图 $H'=(E_i/i\in J,J\subset I)$ 内，若 i，$j\in J$，$E_i\cap E_j\neq\phi$

$\Longrightarrow\bigcap_{i\in J}E_i\neq\phi$。

⑧平衡超图是保形的。

(49) 超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 是平衡的$\Longleftrightarrow$对每一 $S\subset X$，子超图 H_S 是可-2着色的。

(50) 超图 $H=(E_i/i\in I)$ 平衡，并设 $k=\min_{i\in I}|E_i|\Longrightarrow$存在 k 个径集分划 X。

(51) 超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 是平衡的，设其顶点的最低次是 $k\Longrightarrow H$ 的边集可做分划 $(F_1,F_2,\cdots,F_k)$，使每一 F_i 都是一个复盖。

(52) $H=(X,\mathscr{E})$ 为一超图，其秩函数为 $r(A)\Longrightarrow\alpha(H)\leqslant\max_{\substack{A\neq\phi\\A\subset X}}\left[\frac{|A|}{r(A)}\right]^*\leqslant\rho(H)$。

(53) 超图 H 是平衡的$\Longleftrightarrow\gamma(H')=\gamma(H')$ 对 H 的每一部分子图 H' 均成立。

(54) H 是 h 秩的平衡图，$h=h_1+h_2\Longrightarrow$存在 X 的一个分划，$X=(X_1,X_2)$ 使 $r(X_1)=h_1$，$r(X_2)=h_2$。

(55) (Berge, Las Vergnas[1970]) 设 $H=(X,\mathscr{E})$ 是一个超图，令 $\nu(H)$ 是其极大并列集的维，$\tau(H)$ 是其极小径集的维$\Longrightarrow H$ 是平衡的，当且仅当

$\nu(H')=\tau(H')$

对 H 的每一部分子超图 H' 均成立；

(56) H 是一个平衡超图，秩函数为 $r(A)\Longrightarrow\alpha(H)=\rho(H)=\max_{\substack{A\neq\phi\\A\subset X}}\left[\frac{|A|}{r(A)}\right]$。

(57) H 是一个平衡超图，具 m 条边及秩函数 $r(A)$，并设 $k\leqslant m\Longrightarrow$存在一个 k 边的复盖，其充要条件是

$kr(A)-|A|\geqslant 0\qquad(A\subset X)$。

(58) 设已给简单图 $G=(X,E)$，令

$\alpha(G)$ 示 G 的稳固数（G 是极大稳固集的维）；

$Q(G)$ 示 G 里分划 X 的集团的极少个数；

$\gamma(G)$ 示 G 的着色数；

$\omega(G)$ 示 G 里集团的极大维。

若 $\alpha(G_A)=Q(G_A)$ 对一切子集 A 均成立 $(A\subset Z)\Longrightarrow$图 G 称为是 α-完备的。

(59) 以下条件是等价的：

①$\alpha(G_A,\mathscr{D})=\theta(G_A,\mathscr{D})$ 对每一 A 与每一 $\mathscr{D}$ 均成立；

②$\gamma(G_A,\mathscr{D})=\omega(G_A,\mathscr{D})$ 对每一 A 与每一 $\mathscr{D}$ 均成立；

③图 G 里每一奇圈，至少含有这样的一边，G 里每一极大集团，包含此边的，必含奇圈一个第三点。

（四）题　　解

(1) 试证：G的最大对集中的边数是$\frac{1}{2}(r-d)$，这里$d=\max\limits_{S\subset V}\{O(G-S)-|S|\}$。

证：①设G^*是G的极大超图（即G^*的最大对集中的边数和G的最大对集的边数相同，任意加入一不在G^*的边都使G^*的最大对集中的边数增加），下证对G^*满足。显然G^*的最大对集的边数$\frac{1}{2}\leqslant(\Upsilon-d^*)$，$d^*=\max\limits_{S\subset V}\{O(G^*-S)-|S|\}$。

只需证存在$S\subset V$，使G^*的最大对集的边数$=\frac{1}{2}(\Upsilon-d^*)$即可。考虑$G^*$的所有次数为$\nu-1$的顶点集合$U$，不妨设$G^*$不完备（若完备时，且当顶点数为偶数时，$d^*=0$，最大对集边数为$\frac{1}{2}\nu$，若顶点数为奇数时，取$S$为空集，则$d^*=1$，因此，最大对集的边数为$\frac{1}{2}(\Upsilon-1)$），故$G^*-U$不空，将证明$G^*-U$是完备图的不析交的和集。假设不然，$G^*-U$的某一分支不完备，则在此分支里存在顶点$x$、$y$和$z$，使$(x,y)\in E(G^*)$，$(yz)\in E(G^*)$，但$(x,z)\notin E(G^*)$。此外，由于$y\notin D$，故在$G^*-U$中存在一顶点$W$，使$(y,w)\notin E(G^*)$，如图6.2：

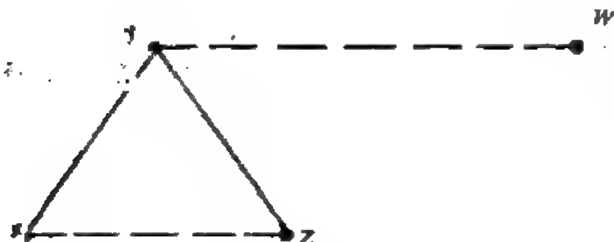


图6.2

由于G^*是极大图，对任一$e\notin E(G^*)$，G^*+e的最大对集边数比G^*的多1。设m_1和m_2分别是$G^*+(xz)$和$G^*+(yw)$的最大对集，用H表示由$M_1\triangle M_2$导出的$G^*\cup\{(x,z),(y,w)\}$的子图，则H中每个顶点的次数为1或2，且H的每个分支点的通路或回路，它们都是关于M_1和M_2交错的。现分两种情况讨论：

第一，若xz和yw在H的不同分支中，记这两个分支为H_{xz}、H_{yw}。

若H_{xz}中M_1的边数不超过M_2的边数，我们在H_{xz}中取m_2的边连同H_{xz}外的M_1的边一起组成了G^*的一个对集，其边数不少于$|M_2|$，这与G^*的极大性矛盾，故H_{xz}中M_1的边数大于M_2的边数，同理H_{yw}中M_2的边数大于M_1的边数，如图6.3；此时，如图所示，在$(u_1,\cdots,z,$

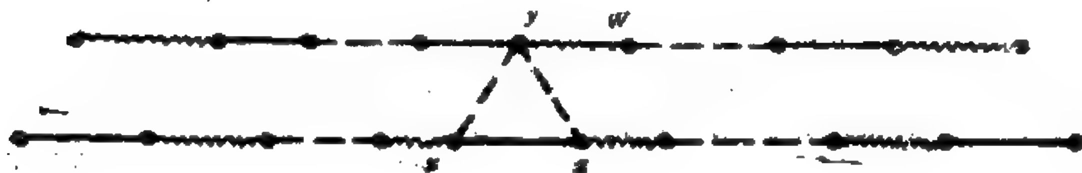


图6.3

$y, w, \cdots, u_2$）的通路上取yz及M_1的边连同此通路外M_2的边一起组成了G^*的一个对集，其边数等于$|M_2|$，这又与G^*的极大性矛盾，故第一种情况不可能。

第二，若xz和yw在H的同一分支中，由x和z的对称性，失一般性可设y、w、z、x依次出现在该分支中，如图6.4：这时，取yz和$yw\cdots\cdots z$段中M_1的边及$yw\cdots\cdots z$段外的M_2的

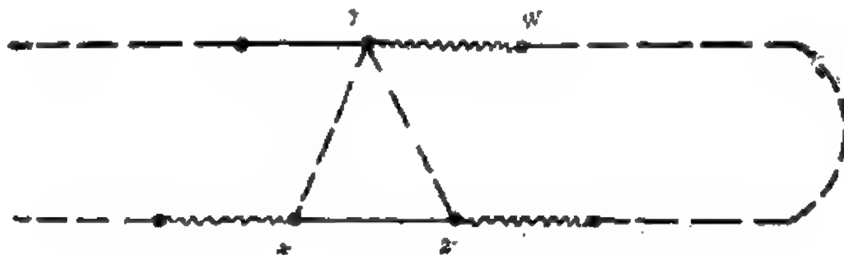


图6.4

边一起组成了G^*的一个对集，其边数等于$|M_2|$，矛盾。当z、x、y、w依次出现在该分支中时，取yz和$zx\cdots\cdots y$段中M_2的边及$zx\cdots y$段外的M_1的边一起组成了G^*的一个对集，其边数等于$|M_1|$，矛盾。

由以上矛盾知G^*-U的分支是完备图，当G^*-U的每个奇分支与U中的一个点对应，则知有d^*个奇分支无U中点的对应，$d^*=O(G^*-U)-|U|$，于是可得G^*的最大对集的边数为$\frac{1}{2}(\nu-d^*)$。

②对于G，G的最大对集的边数也为$\frac{1}{2}(\nu-d^*)$，但是$d\geqslant d^*$，故G的最大对集的边数$\geqslant\frac{1}{2}(\nu-d)$；但又显然对任意的$S$，$G$的最大对集的边数$\leqslant\frac{1}{2}(\nu-d)$，故$G$的最大对集的边数为$\frac{1}{2}(\nu-d)$。

（2）试证：若G是二分图，则G有一个Δ—正则二分超图；

证：若G本身是Δ-正则二分图，则它自已即所求；若G不是Δ-正则的，则我们添加一个与G结构完全相同的二分图$\bar{G}$，构成新二分图$G_1=G\cup\bar{G}$，G_1的二分划为（$x\cup\bar{y}$，$\bar{y}\cup\bar{x}$），虽然可使y与$\bar{y}$、x与$\bar{x}$中顶点一一对应，再将G与$\bar{G}$中的次数小于Δ的y与$\bar{y}$，x与$\bar{x}$中顶点两两连接得新图G'，如下图（图6.5）：

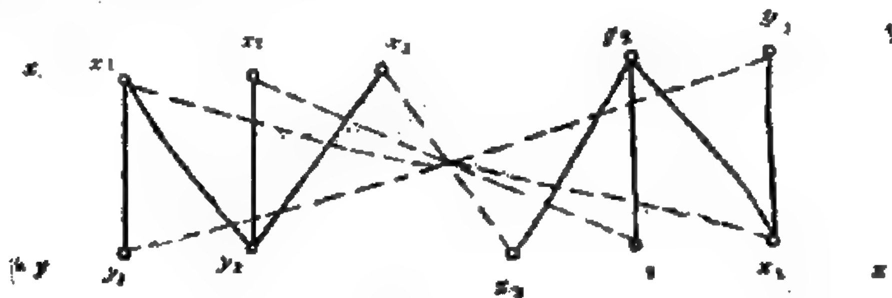


图6.5

则G'是G的二分超图，且$\Delta(G')=\Delta(G)$，$\delta(G')=\delta(G)+1$。重复上面的过程便可得到G的一个Δ-正则二分超图。

（3）①试证，若G是无圈图，则G有一个Δ-正则无圈超图；

②证明：若G是无圈图并且Δ是偶数，则$\chi'\leqslant 3\dfrac{\Delta}{2}$。

证：①若在G中$\exists_{u,v}\in V$，使得$d(u)<\Delta$，$d(v)<\Delta$，则在u、v之间加边uv，直至得到一Δ-正则无圈图或只有一点u有$d(u)<\Delta$，其余点的次都为Δ的图G^*。这时再做$\Delta-d(u)$个与G^*同构的图G_1^*、G_2^*、…、$G_{\Delta-d(u)}^*$。并且在与u相对应的那些点之间连边，于是便得到G的一个Δ-正则无圈超图。

②由于G有一个Δ-正则超图，由结论："每个$2k$-正则图都是2-可因子化的。"知G可划分为$\dfrac{\Delta}{2}$个2-因子，而每个2-因子都存在一个正常3-边着色。

于是G便存在一个正常$3\dfrac{\Delta}{2}$-边着色，即

$$\chi'\leqslant 3\frac{\Delta}{2}.$$

（4）证明定理：设超图$H=(X,\ \mathscr{E})$含n个顶点，m条边，p个联接的分子图，则H无圈的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1)=n-p.$$

证：作二分图$G(H)$，取超图H的顶点做为二分图$G(H)$的一组顶点，取H的边做为$G(H)$的另一组顶点，当且仅当顶点x_j在边E_i上便联边x_jE_i作为$G(H)$的一边，这个二分图$G(H)$共有$m+n$个顶点，$\sum\limits_{i=1}^{m}|E_i|$条边，$p$个联接的分子图，超图$H$无圈当且仅当二分图$G(H)$无圈，且若$H$有$P$个联接的分子图，则$G(H)$也有$p$个联接的分子图。二分图无圈的充要条件是

$$\nu=\sum_{i=1}^{m}|E_i|-(m+n)+p=0,$$

或
$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i|-1)-n+p=0,$$
即证。

（5）证明定理：设$(S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_q)$是超图$H$的一个$q$-着色，并设

$$d_k=\max_{x\in S_k}d_H(x),$$

则
$$\chi(H)\leqslant\max_{k\leqslant q}\min\{k,\ d_{k+1}\}.$$

证：①首先证明存在一个r-着色$(S_1',\ S_2',\ \cdots,\ S_r')$，满足条件

$$\begin{cases}S_k\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\min(k,r)}S_i',\\[2ex] S_k'\text{是}X-\bigcup\limits_{i<k}S_i'\text{中极大稳定集。}\end{cases}$$

设S_1在X中不极大，可以加进若干点，使其变为极大稳固集S'_1。若$S_2-S'_1$在$X-S'_1$里不极大，可以加进顶点，使其成为极大稳固集S'_2，如此等等。根据作法，可知S'_1、S'_2、S'_3、……等无公共顶点，且陆续有

$S_1\subset S'_1$，$S_2\bigcup\limits_{i=1}^{2}S'_i$，$S_1\cup S_2\cup S_3\subset S'_1\cup S'_2\cup S'_3$，最多可如此做到$g$次，故$r\leqslant g$，最后得$H$的一个$r$-着色。

②设$x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{k}S'_i$及$j\leqslant k$，则因$S'_j$的极大性应有边$E'_j$，使

$$E'_j\subset S'_j\cup\{x\},\quad |E'_j|>1.$$

因$x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{k}S'_i$，而$j\leqslant k$，则$S'_j$中必含$E'_j-\{x\}$，$|E'_j|>1$，否则可将$x$加进$S'_j$以加大$S'_j$，这与$S'_j$的极大性相矛盾。

又因$S'_i\cap S'_j=\phi$对任二i、j $(i\neq j)$，$i,j<k$均成立，故$(E_i-\{x\})\cap(E_j-\{x\})=\phi$。

因$x\in E'_j$对一切$j\leqslant k$均成立，族E'_1，E'_2，…，E'_k满足$E'_i\cap E'_j=\{x\}$，$(i\neq j$，i、$j\leqslant k)$。

故 $\quad d_H(x)\geqslant k$。

③取$i(x)$表示含x的S'_i的下标数，据②有

$$i(x)\geqslant k+1\Longrightarrow d_H(x)\geqslant k,$$

取 $\quad k=i(x)-1$

则 $\quad i(x)\leqslant d_H(x)+1,\quad (x\in X)$

设顶点$a\in S_k$，则因$S_k\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\min(k,\ r)}S'_i$，若$k<r$，在$S'_1$、$S'_2$、…、$S'_k$中将出现$a$，故$i(a)\leqslant k$，若$k>r$，$S'_1$、$S'_2$、…、$S'_r$中将出现$a$，故$i(a)\leqslant r<k$，总之有$i(a)\leqslant k$，且

$$i(a)\leqslant\max_{x\in S_k}i(x)\leqslant\max_{x\in S_k}(d_H(x)+1)=d_k+1.$$

综上二者，有

$$i(a)\leqslant\min(k,\ d_k+1),$$

故

$$\max_{x\in X}i(x)\leqslant\max_k\min(k,d_k+1).$$

$\chi(H)$是可能的着色数中的最小者，$\max\limits_{x\in X}i(x)$显然是某一r-着色中最后一个S'的下标，故

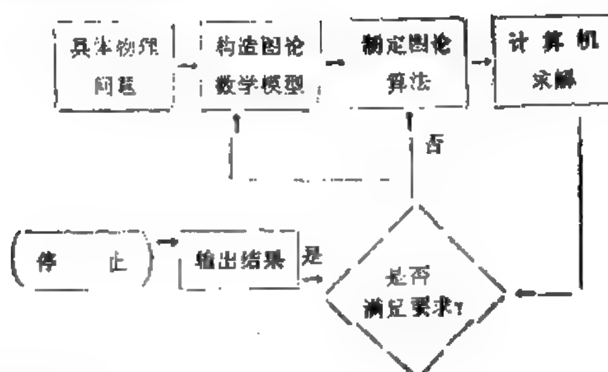
$$\chi(H)\leqslant\max_{x\in X}i(x),$$

或

$$\chi(H)\leqslant\max_k\min(k,\ d_k+1).$$

七、图的算法

图的算法的应用过程如下图所示：



这里给出的图的算法列下：

(1) 判定图的连通性的算法；
(2) 求图 G 中连通片的算法；
(3) 求基本回路的算法；
(4) 求最短路径的算法；
(5) 求各顶点对间最短路径的算法；
(6) 求任意两点间距离的算法；
(7) 求最短树的算法；
(8) 生成全部树的算法；
(9) 关于有向树的算法；
(10) DFS算法；
(11) 图的块划分算法；
(12) 图的强连通块划分算法；
(13) 求割点的算法；
(14) 求连通度的算法；
(15) 判定平面图的算法；
(16) 求最大匹配的匈牙利算法；
(17) 求最佳匹配的算法；
(18) 节点电路分析的算法.

对于上列的诸算法，下面分述之。

1．判定图的连通性的算法

设$G=(V,E)$为无向图，其中$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$n=|V|$，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，$m=|E|$。令$e_i=\langle v_{a_i}, v_{b_i}\rangle$，$i=1, 2, \cdots, m$.

(1) 基本思想：

①$i \leftarrow 1$，$f \leftarrow 1$。

②若v_{a_i}与v_{b_i}同属于一个连通块时，转⑥；否则转（3）。

③若v_{a_i}与v_{b_i}都不属于任何一个连通块，则边$e_i=\langle v_{a_i}, v_{b_i}\rangle$建立一新的连通块，$f \leftarrow f+1$，转⑥。

④若v_{a_i}（或v_{b_i}）属于第p个连通块，但v_{b_i}（或v_{a_i}）不属于任何一个连通块，则边$e_i=\langle v_{a_i}, v_{b_i}\rangle$也属于第$p$个连通块，转⑥。

⑤若v_{a_i}与v_{b_i}分别属于不同的两个连通块，则边$e_i=\langle v_{a_i}, v_{b_i}\rangle$使这个不同的连通块连成一个连通块，转⑥。

⑥$i \leftarrow i+1$，若$i < m+1$，转②，否则结束。

（2）程序：

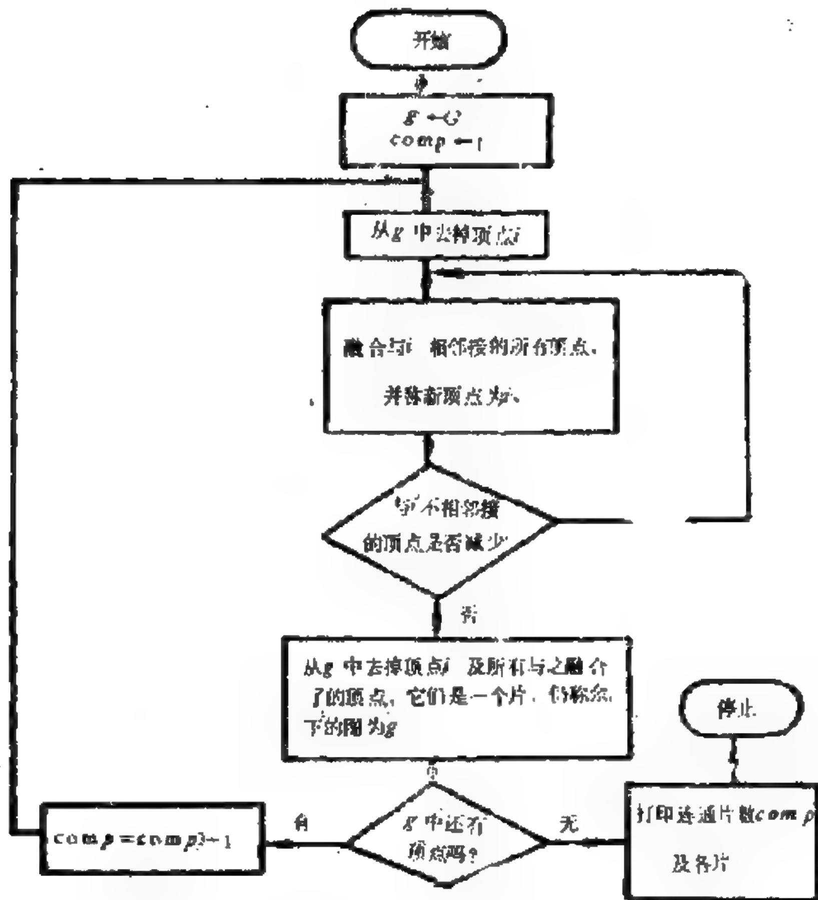
```
begin
integer i, j, k, c, d, e, f;
integer array b[1:n,1:m], p[1:2], q[1:n], L[1:m]; /*b是关联矩阵*/
input b;
c:=1; f:=0;
for i:=1 step 1 until n do q[i]:=0; /*q矩阵用以记录顶点所属的块*/
for j:=1 step 1 until m do /*L矩阵用以记录边所属的块*/
    begin d:=1;
    for i:=1 step 1 until n do
        if b[i, j]=1 then
    begin
    p[d]:=i; d:=d+1/*p矩阵用以记录e_j两顶点*/
    end;
    e:=q[p[1]]; d:=q[p[2]];
    if e=d then
    begin if e=0 then
    bein L[j]:=q[p[1]]:=q[p[2]]:=c; /*情况(3) */
    f:=f+1; c:=c+1
    end else L[j]:=e  /*情况(5) */ end else
    if e= 0  then
    begin
    L[j]:=q[p[1]]:=q[p[2]] /* 情况 (4), v_a未定*/
    end else
    if d=0 then
    begin
    L[j]:=q[p[2]]:=q[p[1]]. /*情况 (4), v_b未定*/
    end else
    begin
    for k:=1 step 1 until n do /*情况 (2) 的处理*/
```

```
if q[k]=e then q[k]:=d;
for k:=1 step 1 until j do
if L[k]=e then L[k]:=d;
f:= f -1;
end;
end.b:end; print f; print L /*打印结果*/.
```

[注：上述程序中数组$b[1:n,1:m]$是图G的关联矩阵；数组$q[1:n]$是用以记录各顶点所属的连通块；整数f是记录连通块的数目，数组L中，若$L[i]=L[j]=c$，说明e_i与e_j同属第c个连通块.]

2. 求图G中连通片的算法

(1) 框图：



(求连通片的算法框图)

(2) 程序：

```
SUBROUTINE CONEKT (D,N,G,COMP)
INTEGER COMP, D(N,N), G(N), Q, P, X1, X2
DO 5 L=1, N
```

```
5   G(L) = 0
    COMP = 1
    I = 1
10  G(I) = COMP
    X1 = 0
    DO 20 Q = 1, N
20  X1 = D(Q, I) + X1
    M = I + 1
25  DO 40 P = M, N
    IF(D(I, P). EQ. 0. OR. G(P). NE. 0) GO TO
    G(P) = COMP
    DO 35 L = M, N
    IF(D(L, P). NE. 1) GO TO 35
    D(L, I) = 1
    D(I, L) = 1
35  CONTINUE
40  CONTINUE
    X2 = 0
    DO 45 Q = 1, N
45  X2 = D(Q, I) + X2
    IF(X1 - X2)50, 55, 55
50  X1 = X2
    GO TO 25
55  DO 60 K = M, N
    IF(G(K). EQ. 0) GO TO 65
60  CONTINUE
    RETURN
65  I = K
    COMP = COMP + 1
    GO TO 10
    END.
```

[注：在子程序CONEKT中，用变量COMP记录连通片的个数；输入图G的邻接矩阵D(N,N)，进行融合顶点运算；引入的一维数组G(N)来记录各个连通片的分布情况；在图G中的顶点i若属于第c个连通片，G(i)就置C．在输出结果时，可以打印连通片的个数及分属于每个连通片的顶点．恰当选择开始顶点可改进算法效率．]

3．求基本回路的算法

（1）步骤：

首先将顶点1送入T，即$T \leftarrow 1$，$W = V$．顶点1将被看成对应树的根。

①若$T \cap W = \phi$，结束运算．

②若$T\cap W\neq\phi$，在$T\cap W$中选择一个顶点z。

③逐步检验与z关联的每一条边，若没有未检验边，从W中去掉z，转①.

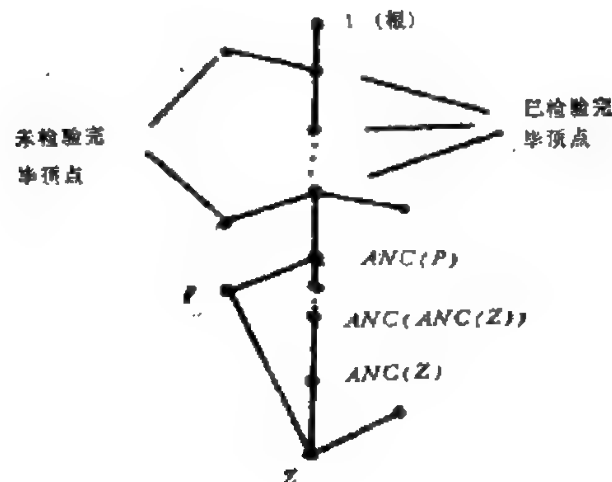
④若有未检验边（z, p），检验p是否在T中.

⑤若$p\in T$，找出由边（z, p）和树中连结顶点z到p的唯一路径形成的基本回路，从图中去掉边（z, p），转③.

⑥若$p\notin T$，把边（z, p）加到树上，顶点p加到集合T，把边（z, p）从图中去掉，转③.

[说明]第⑤步之求法：设一个栈，$TW=T\cap W$，存入已在树上但关联边还未检验完的顶点．建立两个一维数组：$L(i)$ 记录从顶点i到树的根的距离；$ANC(i)$ 是顶点 i的前代顶点，它在树上由顶点 i 到根的唯一路径上，是与 i 邻接的顶点．当顶点 i 不在集合 T 中时，$L(i)=-1$．运算开始时，仅$L(1)$ 置0，即令树的根一顶点1在T中．而$L(i)$ 置$-1(i=2, 3, \cdots, n)$．进行到算法的第⑤步时，若边（z, p）的另一顶点p在集合T中，为了得到基本回路，我们从顶点z开始，一步步地从$ANC(z)$，$ANC(ANC(z))\cdots$一直到$ANC(p)$，即顶点p的前一个顶点，顺序追踪，可以得到树上从顶点z到p的唯一路径．

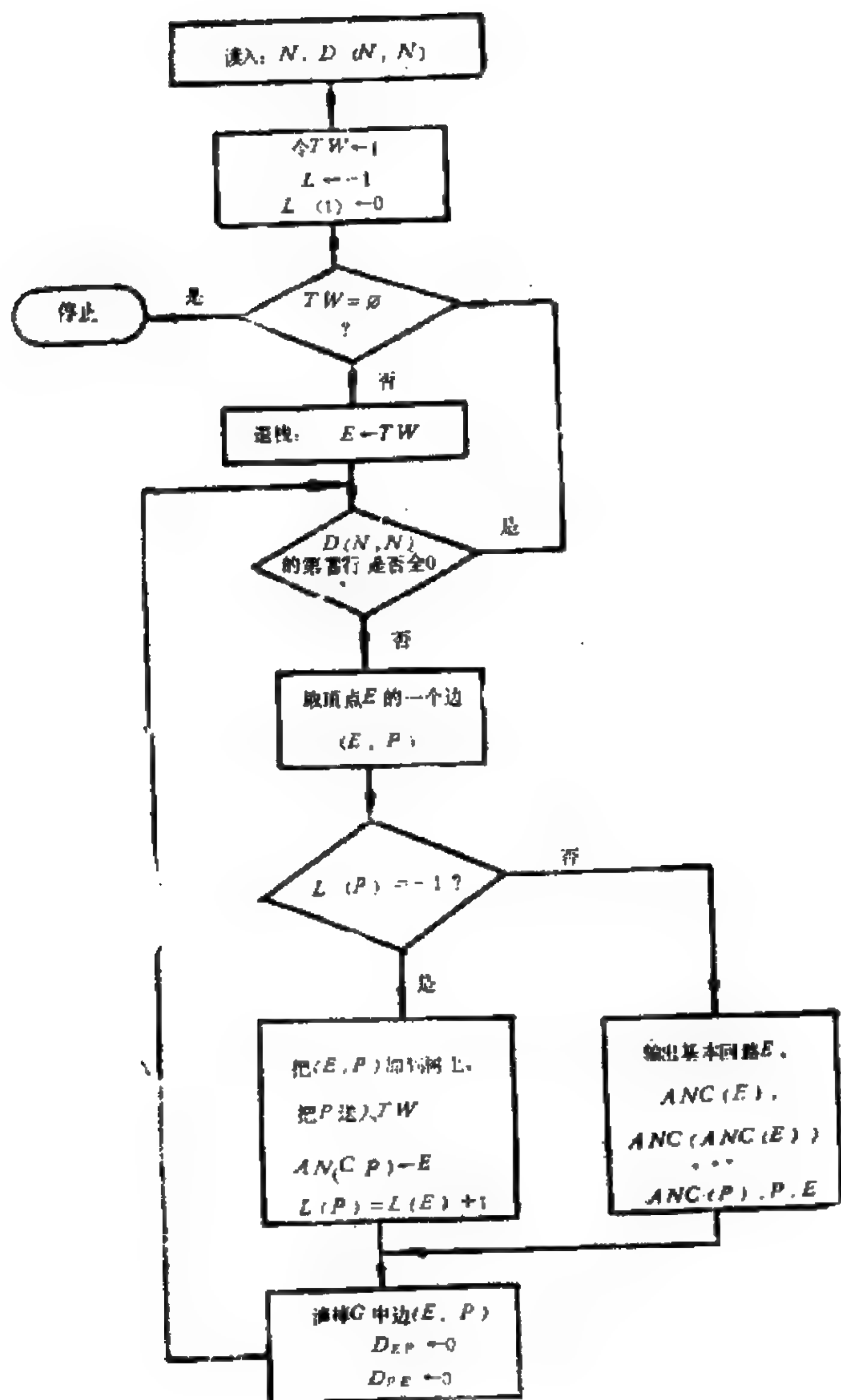
（2）生成基本回路集算法的树：



（3）框图：（见P.151）

（4）程序：

```
      SUBROUTINE FCKTS (D,N,NULTY,L,ANC,TW,CIRKIT)
      INTEGER CIRKIT(N), L(N), ANC(N), TW(N),
    1 D(N,N), Z, P, ED
      NULTY = 0
      DO 5 K=1, N
    5 L(K) = -1
      NGEN = 1
   10 ITW = 1
      TW(1) = NGEN
      L(NGEN) = 0
```



读入：N，D（N，N）
令TW←1
L←-1
L（1）←0
TW=∅
？
停止
是
否
退栈：E←TW
D（N，N）
的第E行是否全0
是
否
取顶点E的一个边
（E，P）
L（P）=-1？
否
是
把（E，P）加到树上，
把P送入TW
ANC（P）←E
L（P）=L（E）+1
输出基本回路E，
ANC（E），
ANC（ANC（E））
…
ANC（P），P，E
消掉G中边（E，P）
D_{EP}←0
D_{PE}←0

（求基本回路的算法框图）

```
15  IF(ITW. EQ. 0) GO TO 50
    Z = TW (ITW)
    LL = L(Z) + 1
    DO 45 P = 1, N
    IF (D(Z,P)) 45, 45, 20
20  IF (L(P) + 1. NE. 0) GO TO 25
    TW(ITW) = P
    ITW = ITW + 1
    ANC (P)  = Z
    L(P) = LL
    GO TO 40
25   NULTY = NULTY + 1
    ED = ANC(P)
    M - 1
    CIRKIT(1) = Z
     J = Z
30  J = ANC (J)
    M = M + 1
    CIRKIT (M)  = J
    IF (J. NE. ED) GO TO 30
    M = M + 1
    CIRKIT(M) = P
WRITE (6, 60) NULTY,  (CIRKIT (J), J = 1,M),
1   CIRKIT(1)
40  D(Z,P) = 0
    D(P,Z) = 0
45  CONTINUE
    ITW = ITW - 1
    GO TO 15
50  DO 55 NGEN = NGEN, N
    IF (L(NGEN). EQ. (-1)) GO TO 10
55  CONTINUE
    RETURN
60  FORMAT (10X, 4HTHE, I4, 22 HFUNDAMETAL 1  CIRCUIT IS
  20 (I3, 1X))
    END
```

4．求最短路径的算法（Dijkstra）算法

（1）步骤：

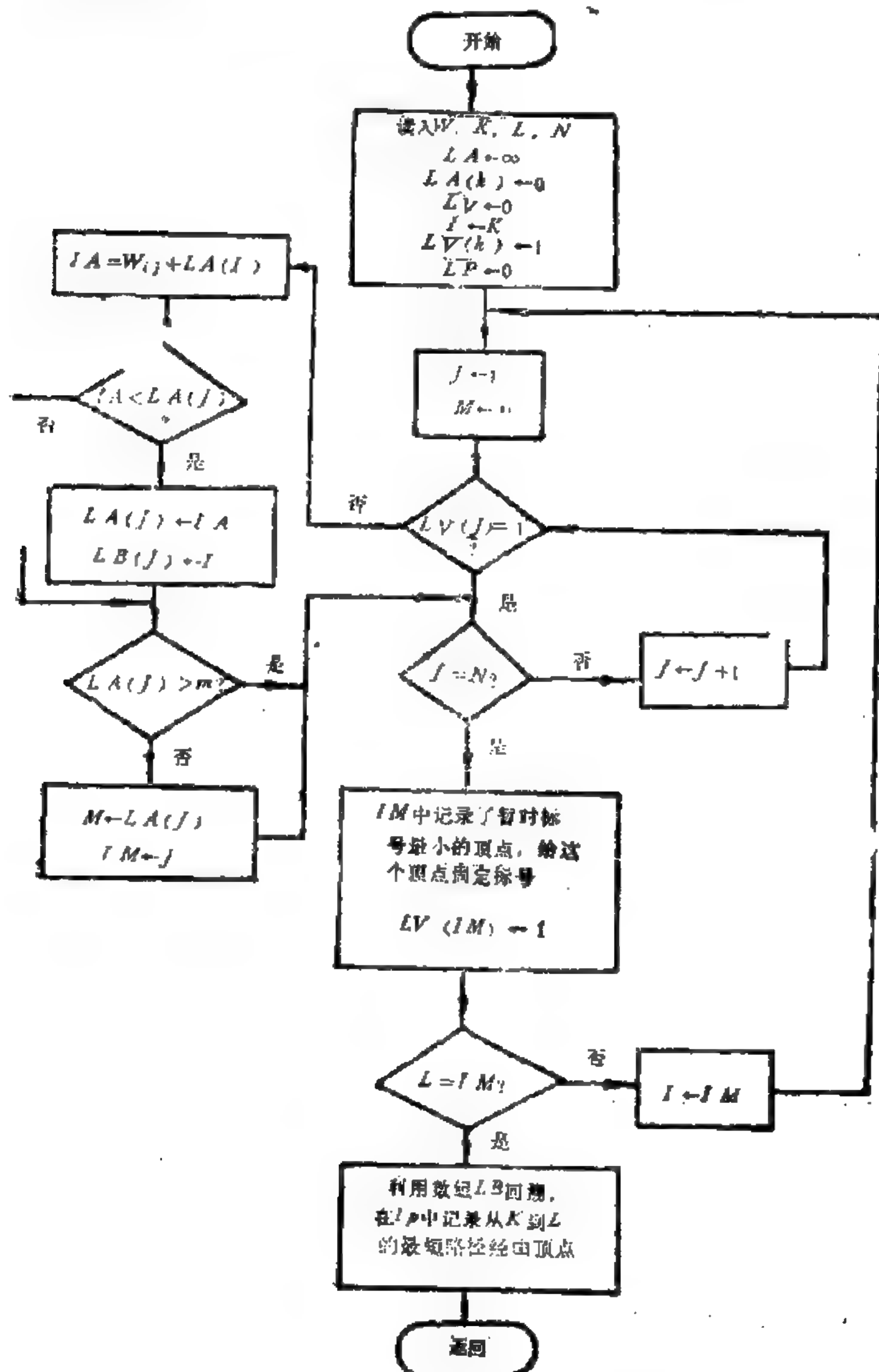
①起点k标号为零，其它顶点标号为无穷大。

②对未被定标的顶点全部给出暂时标号，其值为Min[j的旧标号，(i的旧标号+ω_{ij})]，这里i是前一步刚被标定的顶点，ω_{ij}是边e_{ij}的权；若顶点i和j不相邻接，$\omega_{ij}=\infty$。

③找出所有暂时标号的最小值，用它作为相应顶点的固定标号。若存在几个有同一最小标号值的顶点，则可任选一个加以定标。

重复进行②、③步，直到指定的终点L被定标时为止。用此法可直接得到由起点k到其它顶点的最短路径的长度，那就是该顶点的定标数值。

（2）框图：



（求最短路径的算法框图）

(3) 程序:

```
C SHORTEST PATH FROM K TO L
      SUBROUTINE SDKL (N,JD,LA,LV,K,L,LAL,LP,LB)
      DIMENSION JW(N,N), LA(N), LV(N), LP(N), LB
1      (N)
      DO 10 I=1, N
      LA(I)=9999999
      LP(I)=0
10    LV(I)=0
      LA(K)=0
      LA(K)=1
      I=K
20    M=9999999
      DO 40 J=1, N
      IF(LV(J).EQ.1) GO TO 40
      IA=JW (I,J) +LA(I)
      IF(IA.GE.LA(J)) GO TO 30
      LA(J)=LA
      LB(J)=I
30    IF(LA(J).GT.M) GO TO 40
      M=LA(J)
      IM=J
40    CONTINUE
      LV(IM)=1
      IF (IM.EQ.L) GO TO 50
      I=IM
      GO TO 20
50    LAL=LA (L)
      LP(1)=L
      IC=L
      DO 60 I=2, N
      IF(IC.EQ.K) GO TO 70
      LP(I)=LB(IC)
60    IC=LB(IC)
70    RETURN
      END.
```

5. 求各顶点对间最短路径的算法

(1) 步骤:

①写出权矩阵W=[W_{ij}]. 用W的第一列和第一行，找出所有$W_{ij}>W_{i1}+W_{1j}$的W的元

素，将它们用$W_{i1}+W_{1j}$取代，如此得到一个新矩阵$W_1=[W_{ij}^{(1)}]$，这时W_1中每一元素代表了图中任两顶点间，从一顶点经顶点v_1到另一顶点的最短距离。

②用W_1的第二行和第二列，找出所有的 $W_{ij}^{(1)}>W_{i2}^{(1)}+W_{2j}^{(1)}$ 的 W_1 的元素，将它们用$W_{i2}^{(1)}+W_{2j}^{(1)}$取代，得到新的矩阵$W_2=[W_{ij}^{(2)}]$。这时相当于在任两顶点的路径中嵌入了$v_2$。

③照此一直进行下去，可求出$W_n=[W_{ij}^{(n)}]$.$W_{ij}^{(n)}$则为顶点v_i与v_j间的最短路径之长度。即若$W_{ij}^{(k-1)}>W_{ik}^{(k-1)}+W_{kj}^{(k-1)}$，我们就取经过顶点$v_k$的路径。如下式：

$$W_{ij}^{(k)}=\min[W_{ij}^{(k-1)},\ (W_{ik}^{(k-1)}+W_{kj}^{(k-1)})]$$

（其中$k=1, 2, \cdots, n$；$W_{ij}^{(0)}=W_{ij}$）。

（2）程序：

```
      SUBROUTINE SPBE (W,X,N)
      INTEGER W(N,N), X(N,N)
      DO 5 I=1, N
      DO 5 J=1, N
      L=W(I, J)
      IF (L. NE. 9999999) X (I, J) =J
    5 CONTINUE
      DO 15 K=1, N
      DO 15 I=1, N
      DO 15 J=1, N
      M=W(I, K)+W(K,J)
      IF (M. LT. W(I,J)) GO TO 10
      GO TO 15
   10 W(I,J)=M
      X (I,J)=K
   15 CONTINUE
      RETURN
      END.
```

6. 求任意两点间距离的算法（Warshall）算法

（1）步骤：

①输入D（距离矩阵）。

②$k\leftarrow1$。

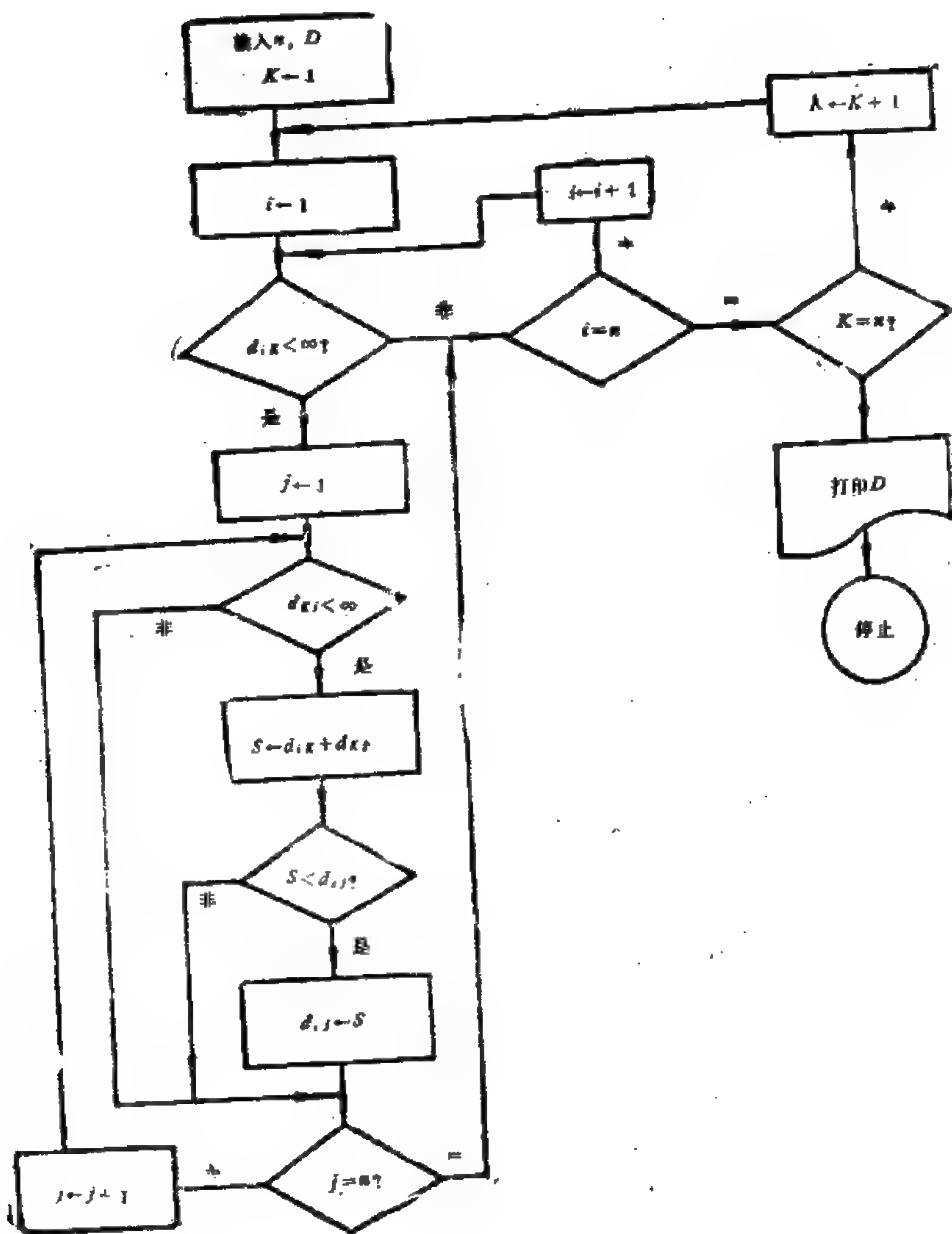
③$i\leftarrow1$。

④$d_{ij}=\min(d_{ij},\ d_{ik}+d_{kj})$，$j=1, 2, \cdots, n$。

⑤$i\leftarrow i+1$；若$i\leqslant n$，转④。

⑥$k\leftarrow k+1$；若$k\leqslant n$，转③，否则停止。

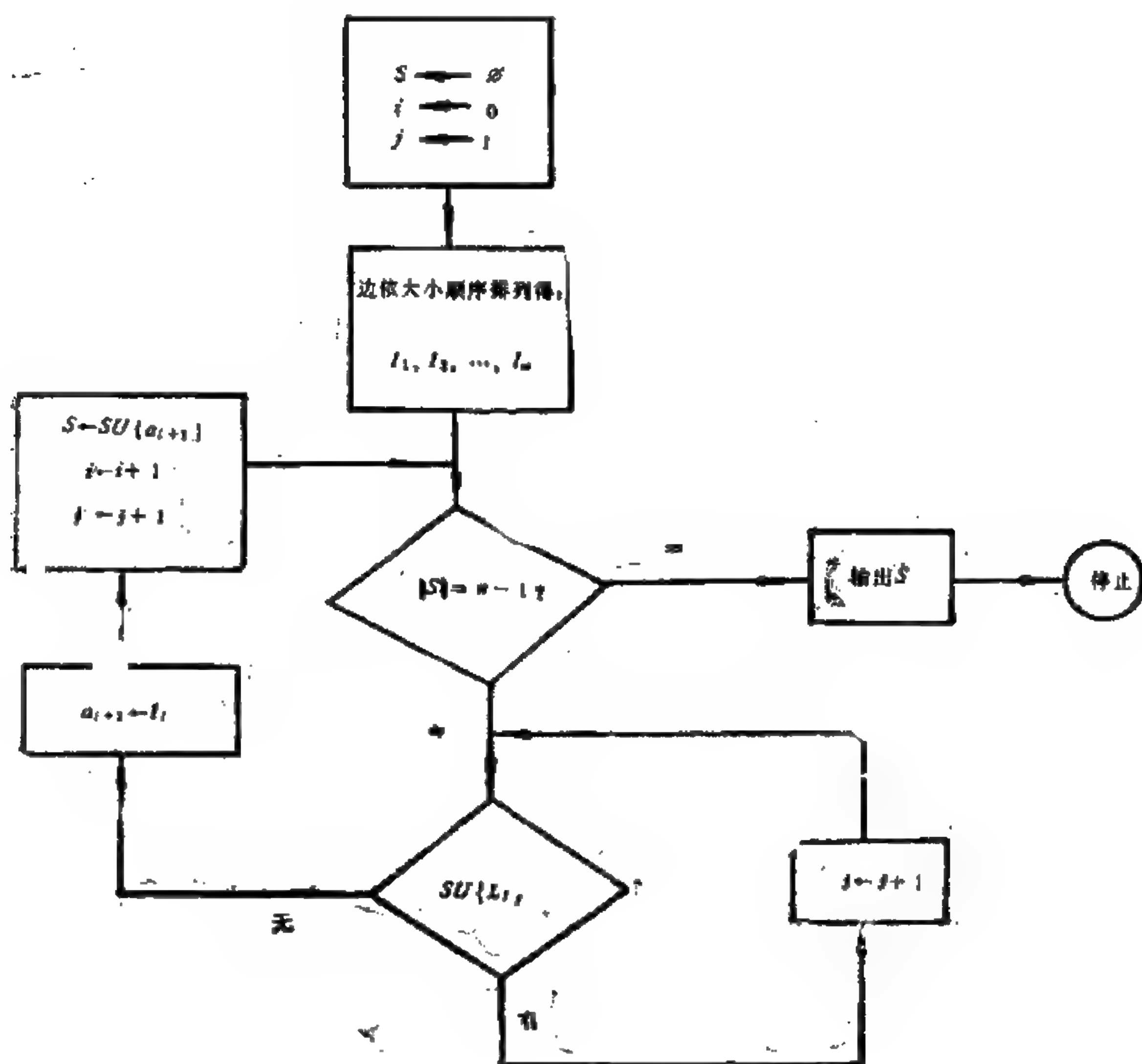
（2）框图：



(求任意两点间距离的算法框图)

7.求最短树的算法（Kruskal算法）

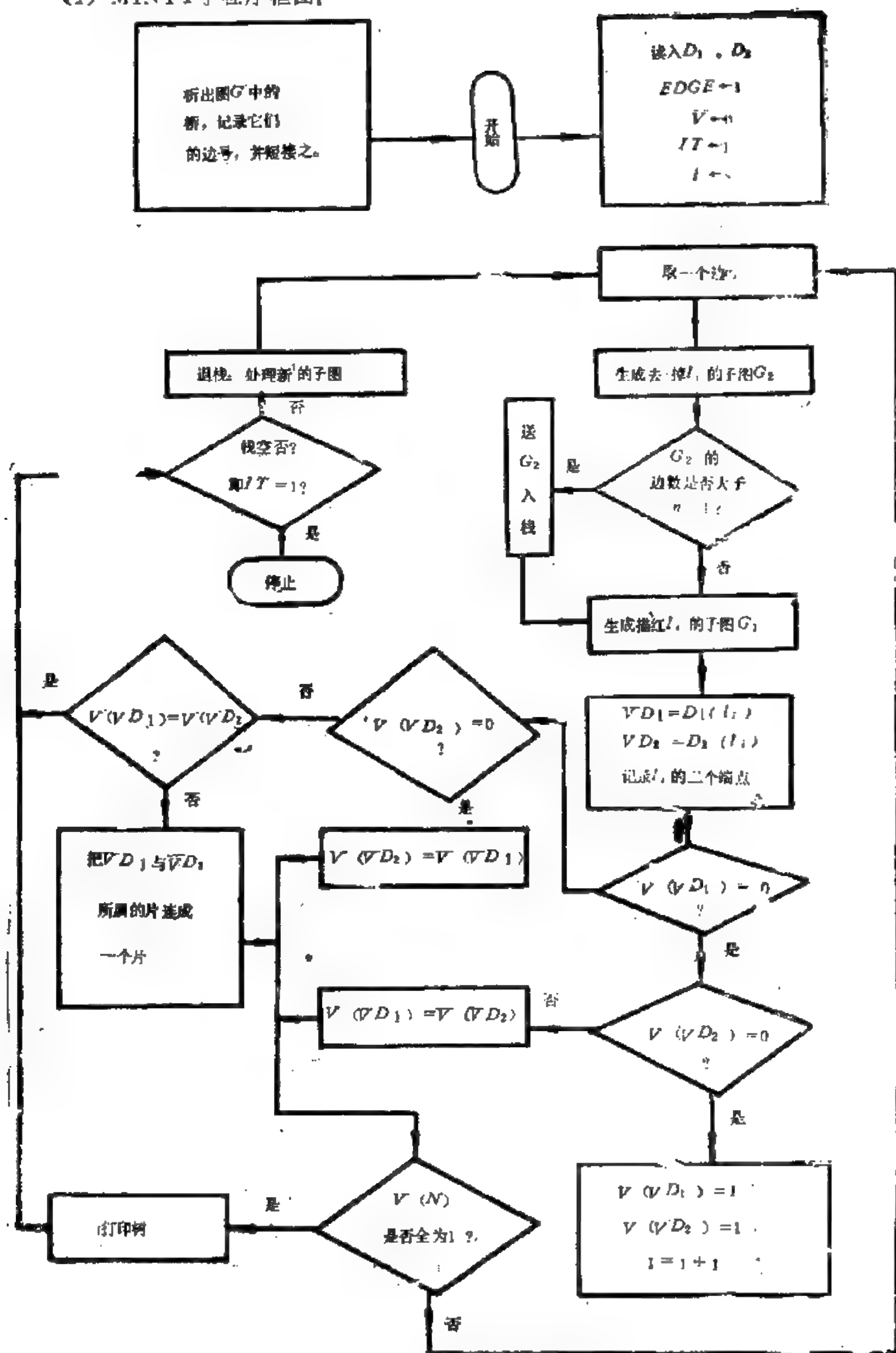
框图：（其中n为顶点个数，m为边数）



（求最短树的算法框图）

8．生成全部树的算法

（1）MINTY子程序框图：



（MINTY子程序框图）

（2）子程序MINTY：

```
      SUBROUTINE MINTY (N,E,R,D1,D2,V,VSTK,ESTK,
    1 EDGE, TREE)
      INTEGER E,R,D1(E),D2(E),V(N),EDGE(E),VSTK
    1 (N,N),ESTK(N,E),TREE(R)
CR=N-1 R IS THE RANK OF THE GRAPH
      DO 5 K=1, E
    5 EDGE(K)=1
      DO 10 K=1, N
   10 V(K)=0
      IT=1
      I = 1
      NT= 0
   15 DO 20 K= 1,E
      IF (EDGE(K). EQ. 1) GOTO 40
   20 CONTINUE
   25 IF(IT. EQ. 1) RETURN
      IT=IT-1
      DO 30 K=1, E
   30 EDGE(K)=ESTK(IT,K)
      I = 0
      DO 35 K= 1,N
      V(K)=VSTK (IT,K)
      IF (VSTK (IT,K). LT. I) GOTO 35
      I=VSTK (IT,K)
   35 CONTINUE
      I = I + 1
      GOTO 15
   40 L=K
      EDGE(L)= 0
      M= 0
      DO 45 K=1,E
      IF(LDGECK). NE. 0) M=M+1
   45 CONTINUE
      IF (M.LT.N-1) GOTO 60
      DO 50 K=1, E
   50 ESTK (IT,K)=EDGE(K)
      DO 55 K=1, N
   55 VSTK (IT,K)=V(K).
```

```
      IT = IT + 1
  60  EDGE(L) = -1
      VD1 = D1 (L)
      VD2 = D2 (L)
      IF(V(VD1).EQ.0) GOTO 95
      IF(V(VD2).EQ.0) GOTO 105
      L = V(VD1)
      M = V(VD2)
      IF(L - M) 70, 25, 65
  65  LCM = M
      M = L
      L = LCM
  70  DO 85 K = 1, N
      IF(V(K) - M) 85, 75, 80
  75  V(K) = L
      GOTO 85
  80  V(K) = V(K) - 1
  85  CONTINUE
      I = I - 1
      GOTO 110
  95  IF(V(VD2).EQ.0) GOTO 100
      V(VD1) = V(VD2)
      GOTO 110
 100   V(VD1) = I
      V(VD2) = I
      I = I + 1
      GOTO 15
 105  V(VD2) = V(VD1)
 110  DO 115 K = 1, N
      IF(V(K).NE.1) GOTO 15
 115  CONTINUE
      NT = NT + 1
      L = 1
      DO 125 K = 1, E
      IF(EDGE(K).EQ.(-1)) GOTO 120
      GOTO 125
 120  TREE(L) = K
      L = L + 1
 125  CONTINUE
```

```
      WRITE(6,130)NT, (TREE(J), J=1, R)
130   FORMAT (2X,3HTHE,I4,2X,4HTREE,100(I2,1H,))
      GOTO 25
      END.
```

9. 关于有向树的算法

(1) 框图:

开始
读入数据
生成A_a矩阵
计算树的数目J
$I=1$
$I\leq J$吗?（否 → 计算2-树数目）
生成第I个树
生成$AT(I)$矩阵
检测有向边
有有向边吗?（否 → 返回）
检测回路
是否有回路?（是 → 返回）
打印树支导纳乘积
$I=I+1$

计算2-树数目
$I=1$
$I\leq J$吗?（否 → 停）
是
生成第I个2-树
生成$AT(I)$矩阵
检测有向边
有向树吗?（否 → 返回）
是
检测回路
是否有回路?（是 → 返回）
否
打印2-树树支导纳乘积
确定代数余子式
打印代数余子式
$I=I+1$

(关于有向树的算法框图)

(2) 程序：

```
      INTEGER A(10,45), AT(10,9), C(45), PART1(10),
   1  IY(10), DIR, SINK1
      DIMENSION NT(45), NF(45)
      READ (2,100) K0, K1
      WRITE(5,100) K0,K1
      CALL NETPM(K1,NT,NF)
      CALL AMTX (K0,K1,NT,NF,A)
      DO 5 K=1, K1
    5 WRITE(5, 100)K, NT(K), NF(K)
      DO 6 I=1, K0
    6 WRITE (5,100) (A(I,J),J=1,K1)
      K2=K0-1
      CALL NCOMB (K2,K1,NCB)
      WRITE (5,100) NCB
      DO 11 K3=1, NCB
      CALL COMBN (K2,K1,K3,C)
      CALL ATMTX(K0,K1,NCB,A,C,AT,K2)
      CALL TSTDR (K0,K2,AT,DIR)
      IF (DIR) 10,10,11
   10 CONTINUE
      CALL TSTLP (K0,K2,NCB,AT,ITST)
      IF(ITST) 11,11,12
   12 L=1
      DO 25 I=1,K1
      IF(C(I)) 25,25,13
   13 IY(L)=I
      L=L+1
   25 CONTINUE
      WRITE (5,101) (IY(K), K=1, K2)
   11 CONTINUE
      K2=K0-2
      CALL NCOMB (K2,K1,NCB)
      WRITE (5,100) NCB
      DO 15 K3=1, NCB
      CALL COMBN (K2,K1,K3,C)
      CALL ATMTX (K0,K1,NCB,A,C,AT,K2)
      CALL TSTDR (K0,K2,AT,DIR)
      IF (DIR) 14,14,15
```

```
14  CONTINUE
    CALL TSTLP (K0,K2,NCB,AT,ITST)
    IF (ITST) 15,15,16
16  CONTINUE
    CALL DCODE (AT,K0,K2,C,SINK1, PART1,LL)
    L = 1
    DO 35 I=1, K1
    IF(C(I)) 35,35,33
33  IY(L)=I
    L = L + 1
35  CONTINUE
    WRITE(5,101) (IY(K),K=1,K2)
    DO 40 I=1,LL
40  WRITE(5,103) SINK 1, PART 1 (I)
103 FORMAT ('DELTA(',I2,',',I2,')')
15  CONTINUE
100 FORMAT (16 I 5)
101 FORMAT ('Y',I2,10(',Y',I2))
    STOP
    END
    SUBROUTINE NETPM (K1,NT,NF)
    DIMENSION NF(45), NT(45)
    NE = K1
    DO 5 K=1, NE
    READ(2,100) K,NT(K),NF(K)
5   CONTINUE
100 FORMAT (3 I 5)
    RETURN
    END
    SUBROUTINE COMBN (K2,K1,K3,C)
    INTEGER C (45)
    IF (K3-1) 40,9,14
9   DO 10 I=1,K1
10  C(I) = 0
    DO 11 I=1, K2
11  C(I) = 1
    GO TO 40
14  I=K1
    IF(C(I)) 20, 20, 26
```

```
20  I=I-1
    IF(C(I)) 20, 20, 21
21  C(I) = 0
    I = I + 1
    C(I) = 1
    GO TO 40
26  L = 1
27  I=I-1
    IF(C(I)) 29, 29, 28
28  L = L + 1
    GO TO 27
29  I = I - 1
    IF(C(I)) 29, 29, 30
30  C(I) = 0
    I = I + 1
    K4=I+L
    K5=I+L+1
    DO 31 K=I, K4
31  C(K) = 1
    DO 32 I=K5, K1
32  C(I) = 0
    GO TO 40
40  CONTINUE
    RETURN
    END
    SUBROUTINE TSTLP(K0,K2,NCB,AT,ITST)
    INTEGER AT(10,9)
    CALL TSTRT
    DO 10 I=1, K0
    DO 10 J=1, K2
    IF(AT(I,J)) 10, 10, 1
1   N = 1
    L = J
6   DO 3 K=1, K0
    IF(AT(K,L)) 2, 3, 3
3   CONTINUE
2   DO 4 L=1, K2
    IF(AT(K,L)) 4, 4, 5
4   CONTINUE
```

```
      GO TO 10
5     N = N + 1
      IF(N - K0) 7, 7, 12
7     CONTINUE
      GO TO 6
10    CONTINUE
      ITST = 1
      GO TO 15
12    CONTINUE
      ITST = 0
15    RETURN
      END
      SUBROUTINE NCOMB (K2, K1, NCB)
      PDNA = 1.0 E 00
      PRODN = 1.0 E 00
      K3 = K1 - K2 + 1
      DO 11 I = K3, K1
11    PRODN = PRODN * I
      DO 14 I = 1, K2
14    PDNA = PDNA * I
      NCB = PRODN/PDNA
      RETURN
      END
      SUBROUTINE AMTX(NN, NE, NT, NF, A)
      INTEGER A(10, 45)
      DIMENSION NT(45), NF(45)
      DO 10 J = 1, NN
      DO 10 K = 1, NE
10    A(J, K) = 0
      DO 12 K = 1, NE
      I = NT(K)
      J = NF(K)
      A(I, K) = -1
      A(J, K) = 1
12    CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ATMTX (K0, K1, NCB, A, C, AT, K2)
      INTEGER A(10, 45), AT(10, 9), C(45)
```

```
      L = 1
      DO 11 J=1, K1
      IF(C(J)-1) 11, 9, 11
9     DO 10 K=1, K0
10    AT(K,L) = A(K,J)
      L = L + 1
      IF(L-K2) 11, 11, 12
11    CONTINUE
12    CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TSTDR(K0, K2, AT, DIR)
      INTEGER AT(10,9), DIR
      CALL TSTRT
      DO 12 I=1, K0
      L = 0
      DO 10 J=1, K2
      IF(AT(I,J)) 10, 10, 9
9     L = L + 1
      IF(L-2) 10, 11, 11
11    CONTINUE
      DIR= 1
      GO TO 20
10    CONTINUE
12    CONTINUE
      DIR= 0
20    CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DCODE (AT,K0,K2,C,SINK1,PART1,
     1 LL)
      INTEGER AT(10,9),PART1(10),C(45),SINK1
      DO 2 I=1, K0
      DO 1 J=1, K2
      IF(AT(I,J)) 1, 1, 2
1     CONTINUE
      SINK1= 1
      GO TO 8
2     CONTINUE
```

```
8    L = 1
     DO 20 I=1, K2
     M = I
     IF(AT(SINK1,I)) 3, 20, 20
3    DO 4 J=1, K0
     IF(AT(J,M)) 4, 4, 5
4    CONTINUE
5    PART1(L)=J
     L = L + 1
     DO 6 M=1, K2
     IF(AT(J,M)) 3, 6, 6
6    CONTINUE
     GO TO 20
20   CONTINUE
     PART1(L)=SINK1
     LL=L
     RETURN
     END.
```

10. DFS算法

(1) 步骤：

一般按邻接编目法输入图G，把开始搜索的顶点标号为1，用T和B表示图G中边的两个互补的子集。其中T表示树上的边，以k为序号；B表示不在树上的边。v为正在检查顶点，w为待检查顶点，$Num(i)$为给每一个顶点的标号。

①令$v\leftarrow 1$，$k\leftarrow 1$，$L\leftarrow 1$，$Num(1)\leftarrow 1$。

②寻找没有检验的关联边。

a) 取v中第一个没有检验的边，设为(v,w)，经过此边，到达顶点w，规定边(v,w)的方向为从v到w，转③；

b) 若没有这样的边，即顶点v的每一关联边都已检验过了，转④。

③*a*) 若w是未被访问过的顶点，即$Num(w)$还没有确定，把边(v,w)送入集合T，令$v\leftarrow w$，$k\leftarrow k+1$，$Num(w)\leftarrow k$，转②；

b) 若w是已被访问过的顶点，即$Num(w)\neq 0$，把边(v,w)送入集合B，回到针点v，$L\leftarrow L+1$，转②。

④确定集合T中指向顶点v的边(u,v)。

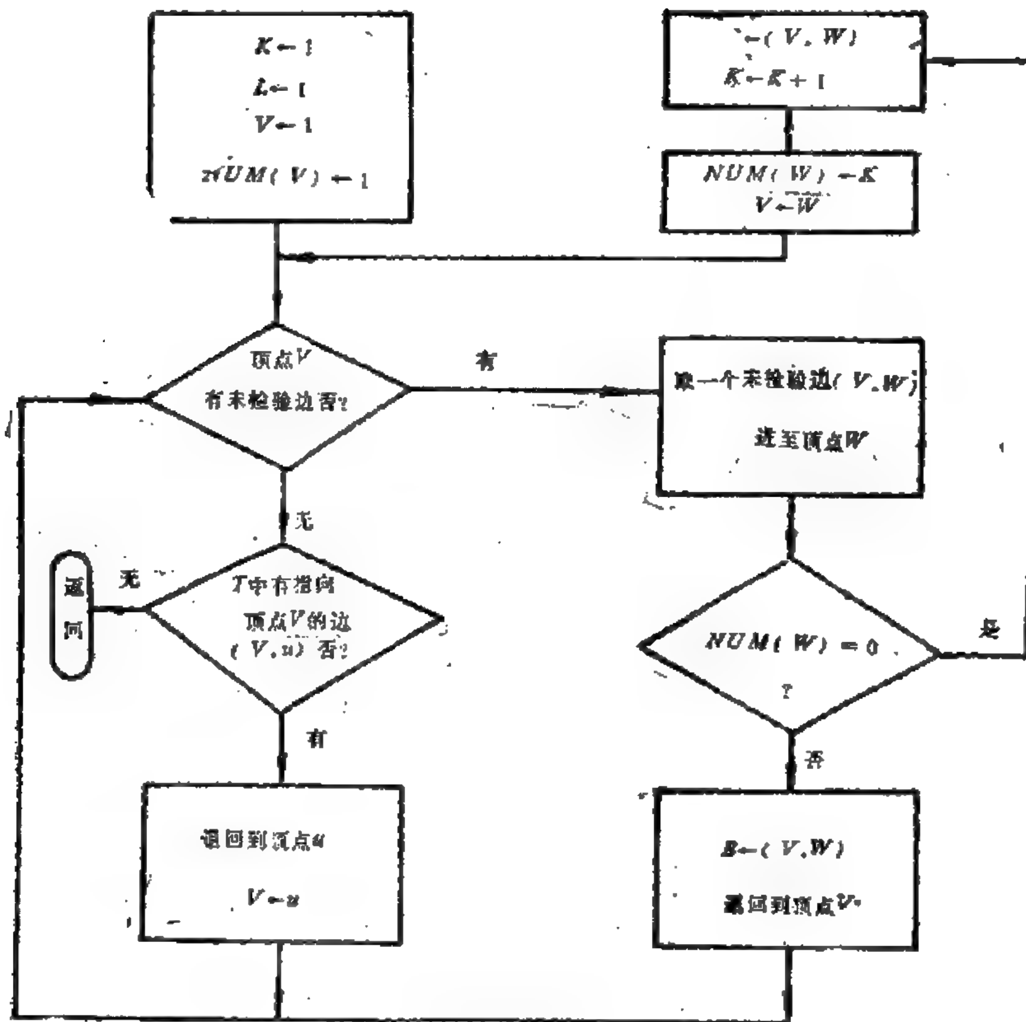
a) 找到该边返回到顶点u，令$v\leftarrow u$，转②；

b) 没有边(u,v)，停止。

---

* DFS算法不仅得到了一个树和给顶点标了号，而且给图G确定了一个结构，它在多种算法中都会得到应用。

(2) 框图：



(DFS算法框图)

(3) 程序：

```
      SUBROUTINE DFS(N,J,R,MU,NADJ,NEAR,T1,T2,B1
     1 B2,NUM)
      INTEGER R,E,V,W,J,T1(R),T2(R),B1(MU),B2(MU)
      DIMENSION NADJ(N),NEAR(N,J),NUM(N)
CR=N-1 R IS THE RANK OF THE GRAPH
CMU=E-N+1 MU IS THE NULTY OF THE GRAPH
      L=1
      K=1
      V=1
      NUM(1)=1
      DO 5 J=2, N
 5    NUM(J)=0
```

```
6     NK = NADJ(V)
10    DO 15 J = 1, NK
      IF(NEAR(V,J). NE. 0) GO TO 25
15    CONTINUE
      IF(NUM(V). EQ. 1) RETURN
      M = NUM(V) - 1
      V = T1(M)
      GO TO 6
25    W = NEAR(V,J)
      NEAR(V,J) = 0
      NA = NADJ(W)
      DO 30 KK = 1, NA
      IF(NEAR(W,KK). EQ. V) GO TO 35
30    CONTINUE
35    NEAR(W,KK) = 0
      IF(NUM(W). NE. 0) GO TO 40
      T1(K) = V
      T2(K) = W
      K = K + 1
      NUM(W) = K
      V = W
      GO TO 6
40    B1(L) = V
      B2(L) = W
      L = L + 1
      GO TO 10
      END.
```

11. 图的块划分算法

(1) 标记：若 v 点的"子孙"为 $D_T(v)$，则 $R_T(v) \triangleq D_T(v) \cup \{v_k | (v_j, v_k) \in \bar{T}, v_j \in D_T(v)\}$. $low(v_i) \triangleq \min\limits_{v_j \in R_T(v)} \{num(v_j)\}$.

(2) 流程：

(S_1)：给初始值：

①$R(i) = r(v_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. $n = |V(G)|$；

②$E \leftarrow \phi$；

③$k \leftarrow 1$, $l \leftarrow 1$, $h \leftarrow 0$, $m \leftarrow 1$；

④任选一 $v_i \in V(G)$ 并给以标号.

(S_2)：

①Slack*$(k) \leftarrow v_i$, $num(v_i) \leftarrow m$, $low(v_i) \leftarrow m$.

* Slack(k) 是以 k 为参数的栈.

②$R(i)$ 为空时，$l \leftarrow l-1$，转③. $R(i)$ 非空时，设$R(i)=\{(v_i, v_j), R_1(i)\}$：

a) v_j未给标号时，$S(l) \leftarrow (v_i, v_j)$，给$v_j$以标号，$R(i) \leftarrow R_1(i)$，且 $i \leftarrow j$，$k \leftarrow k+1$，$l \leftarrow l+1$，$m \leftarrow m+1$，转①.

b) v_j已给标号，这时$num(v_i) > num(v_j)$. 若 $v_j \neq Stack(k-1)$ 时作 $low(v_i) \leftarrow \min\{low(v_i), num(v_j)\}$，$S(l) \leftarrow (v_i, v_j)$，$R(i) \leftarrow R_1(i)$，$l \leftarrow l+1$，转②；若 $v_j = Stack(k-1)$，则$R(i) \leftarrow R_1(i)$，转②.

③$k=1$时转 (S_3)，$k \neq 1$时做

a) 取$Stack(k-1)$ 的元素，设为v_d，$low(v_i) \geqslant num(v_d)$ 时转④，否则转b).

b) $low(v_d) \leftarrow \min\{low(v_d), low(v_i)\}$，$i \leftarrow d$，$k \leftarrow k-1$，转②.

④栈$S(l)$的顶上元素设为 (v_p, v_q).

a) 当$p=d$，且$q=i$时，转c)，否则转b).

b) $E \leftarrow E \cup \{(v_p, v_q)\}$，$l \leftarrow l-1$，转④.

c) $h \leftarrow h+1$，$E_h \leftarrow E \cup \{(v_d, v_i)\}$，$i \leftarrow d$，$k \leftarrow k-1$，$E \leftarrow \phi$，转②.

(S_3)：存在有未给标号的顶点时，任取其一v_a，给v_a以标号，$i \leftarrow a$，且$k \leftarrow 1$，$l \leftarrow 1$，$m \leftarrow m+1$，$E \leftarrow \phi$，转 (S_2). 若所有的顶点都已给标号，则结束.

12．图的强连通块划分算法

(1) 标记：从v点出发，通过属于T的边，最多通过一条属于B的边，所能到达和v属于同一个强连通块的点的集合，用$R(v)$ 示之. 令

$$lowlink(v_i) = \min_{v_j \in R(v_i)} [num(v_j)].$$

(2) 流程：

(S_1)：给初值：

①$R(i) \leftarrow r(v_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$.

②$State(v_i) \leftarrow 0$，$i=1, 2, \cdots, n$.

③$V \leftarrow \phi$.

④ $k \leftarrow 1$，$l \leftarrow 1$，$m \leftarrow 1$，$h \leftarrow 1$.

⑤任选一顶点v_i.

(S_2)：

①$Stack(k) \leftarrow v_i$，$num(v_i) \leftarrow m$，$low\ link(v_i) \leftarrow m$，$State(v_i) \leftarrow 1$.

②$S(l) \leftarrow v_i$.

③若$R(i)$ 为空时，转④. $R(i)$ 非空时，设$R(i)=\{(v_i, v_j), R_1(i)\}$，做：

a) $State(v_j)=0$时，$R(i) \leftarrow R_1(i)$，$i \leftarrow j$，$k \leftarrow k+1$，$l \leftarrow l+1$，$m \leftarrow m+1$，转①.

b) $State(v_j) \neq 0$时，当$State(v_j)=1$，且$num(v_j) < num(v_i)$时，做 $lowlink(v_i) \leftarrow \min\{lowlink(v_i), num(v_j)\}$，$R(i) \leftarrow R_1(i)$，转③. 否则 $R(i) \leftarrow R_1(i)$，转③.

④$lowlink(v_i) = num(v_i)$ 时，转 (S_3). 否则，$v_d \triangleq Stack(k-1)$，$lowlink(v_d) \leftarrow \min\{lowlink(v_d), lowlink(v_i)\}$，$i \leftarrow d$，$k \leftarrow k-1$，转③.

(S_3)：令$v_g \triangleq S(l)$，做

①$num(v_g) \leqslant num(v_i)$ 时，转②，否则转③.

②$V \leftarrow V \cup v_i$，State(v_i)←2，$l \leftarrow l-1$，若$l=0$，则转③，否则转①。

③$V_h \leftarrow V$，$V \leftarrow \phi$，转④。

④$k=1$时，转（S_4）。$k \neq 1$时，$k \leftarrow k-1$，$h \leftarrow h+1$，令$v_p \triangleq$Stack(k)，$i \leftarrow p$，然后转（S_2）的③。

（S_4）：若存在State(v_q)＝0的顶点v_q时，$i \leftarrow q$，$l \leftarrow 1$，$m \leftarrow m+1$，$h \leftarrow h+1$，转（S_2）；若不存在State(v_q)＝0的顶点，则结束。

若上述算法给出的结果是$h=p$，则由V_h（$h=1, 2, \cdots, p$）的顶点以及两顶点属于V_h的所有的边组成了强连通块。

13．求割点的算法

（1）标记：

$$Low(v)=Min(\{Num(v)\}\cup\{Num(w)\})$$

上式表示Low(v)取顶点v或w的DFS标号中的小值。其中w是指这样一些顶点，它们是v的前代顶点，而且有从v的后继顶点x指向它的返回边（x,w）。对于所有这样的w，取它们的标号的集合，记为{Num(w)}。

（2）程序：

```
      SUBRCUTINE CUTND (N,R,MU,T1,T2,B1,B2,NUM,
     1 LOW, KN)
      INTEGER R, T1(R), T2(R), B1(MU), B2(MU), KN(N),
     1 F, S
      DIMENSION LOW(N)  NUM(N)
      DO 5 K=1, N
      KN(K)= 0
    5 LOW(K)=NUM(K)
      DO 10 K=1, MU
      F=B1(K)
      S=B2(K)
      IF(LOW(F).GE.NUM(S)) LOW(F)=NUM(S
   10 CONTINUE
      DO 15 K=1, R
      M=R-K+1
      F=T1(M)
      S=T₂(M)
  IF(LOW(S).LE.LOW(F)) LOW(F)=LOW(S)
   15 CONTINUE
      M= 0
      DO 20 K=1, R
      F=T1 (K)
      S=T2(K)
      IF(F.EQ.1)M=M+1
```

```
      IF(LOW(S).GE.NUM(F).AND.F.NE.1)KN(F) = F
 20   CONTINUE
      IF(M.GE.2) KN(1) = 1
      RETURN
      END.
```

(3) 注：①在调用子程序CUTND之前，需先调用子程序DFS，把边分为两类集合T和B，并求出标号Num(N)。CUTND则直接输入这些数组,进行比较，得出标号LOW(N)。子程序CUTND的输出是一维数组KN(N)和LOW(N)。在KN(N)中，若KN(i) = i，则表明它是割点；否则KN(i) = 0。

②子程序CUTND仅仅给出了图G中的割点，但不难通过对它稍加改变，使之能够给出各个边与顶点分属各个块的情况，并指出属于桥的边。

14. 求连通度的算法

(1) 标记：

N——图G顶点数。

$NC(N,N)$——邻接矩阵。

变量S和T——记录图G中两个顶点。

V_1、V_2、L_1、L_2、M——对图G进行标号应用的中间数组，都是长度为N的整形一维数组。

变量KC——应用程序CONY所求得的顶点S与T之间的连通度记于其中。

(2) 程序：

```
      SUBROUTINE CONY(N,NC,S,T,V1,V2,L1,L2,M,KC)
      DIMENSION NC(N,N),L1(N),L2(N),M(N)
      INTEGER V1(N), V2(N), S, T
      LOGICAL J1, J2, J3, J4
      KC = 0
 5    I = S
      DO 10 L=1, N
      L1(L) = 0
      L2(L) = 0
      V1(L) = 0
      V2(L) = 0
 10   M(L) = 0
 15   J1 = V1(I).GT.0.AND.L1(I).EQ.0
      J2 = V1(I).LT.0.
      J3 = V1(I).GT.0.AND.L1(I).EQ.1
      J4 = .TRUE.
      DO 30 K=1, N
 30   IF(NC(I,K).EQ.1.AND.NC(K,I).EQ.0)J4 = .FALSE
      DO 20 J=1, N
```

```
      IF(J.EQ.S.OR.V1(J).LT.0.OR.V2(J).LT.
    1 0.OR.NC(J,I).EQ.0) GO TO 20
      IF(NC(I,J).EQ.0) GO TO 25
      IF(V1(J).NE.0) GO TO 20
      IF(I.EQ.S.OR.J1.AND.J4.OR.J2) GO TO 35
      IF(J3) GO TO 40
      GO TO 20
   25 IF(J1.OR.J2) GO TO 45
      GO TO 50
   40 M(J) = 1
   35 V1(J) = I
      GO TO 55
   50 M(J) = 1
   45 IF(V1(J).GT.0.AND.L1(J).EQ.1) GO TO 60
      V1(J) = -1
      GO TO 55
   60 V2(J) = -1
   55 IF(J.EQ.T) GO TO 65
   20 CONTINUE
      L1(I) = 1
      IF(V2(I).LT.0) L2(I) = 1
      DO 70 K=1, N
   70 IF(V1(K).NE.0.AND.L1(K).EQ.0.OR.V2(K).NE.0.
    1 AND.L2(K).EQ.0) GO TO 75
      RETURN
   75 I = K
      GO TO 15
   65 KC=KC+1
      I = T
   80 IF(V1(I).LT.0) GO TO 85
      MC=V1(I)
      NC(I,MC) = 0
      GO TO 90
   85 MC= -V1(I)
  100 NC(MC,I) = 1
   90 IF(MC.EQ.S) GO TO 5
      IF(M(I).EQ.0) GO TO 85
      I=MC
      MC= -V2(I)
```

```
      GO TO 100
95    I=MC
      GO TO 80
      END.
```

15．判定平面图的算法

(1) 标记：

B_{ic}——边递增的回路矩阵。

E——边集矢量E是一个n维列矢量，n是边递增的回路矩阵B_{ic}的行数。E的第k个元素对应于B_{ic}的第k行，其值为第k行中"1"的个数。

C_i——回路组合矢量C_i是一个n维行向量，n是边递增的回路矩阵B_{ic}的行数，其中$e-v+2$个元素是1，其余为0。每个回路组合矢量C_i表示一个回路组合，C_i中各元素1所对应的序号就是参加该回路组合那些回路的序号。

B_s——完全回路矩阵B_c包含的一个$e-v+2$行、e列的子矩阵。

(2) 步骤：

①生成边递增的回路矩阵B_{ic}。

②由B_{ic}生成边集矢量E.

③产生由$C_1=[\underbrace{1\ 1\cdots 1}_{e-v+2}\ 0\ 0\cdots 0]$开始的回路组合矢量$C_i$，由$C_1$开始检验。

④得出矩阵乘积$C_iE=p$。

⑤若$p<2e$转到第③步，取下一个回路组合矢量。

若$p=2e$，转到第⑥步。

若$p>2e$，转到第⑦步。

⑥生成子矩阵B_s，它的$e-v+2$个行是C_i中为1的元素所代表的B_{ic}的行。若B_s每列含有且仅含有两个"1"，则图为平面图，停止检验。否则转到第③步，应用下一个回路组合矢量。

⑦看一下C_i是否是本原回路组合矢量。若是，则图G为非平面图，停止检验。否则，到第③步，应用下一个回路组合矢量。

16．求最大匹配的匈牙利算法

框图： (见P.175)

17．求最佳匹配的算法

框图： (见P.176)

18．节点电路分析的算法

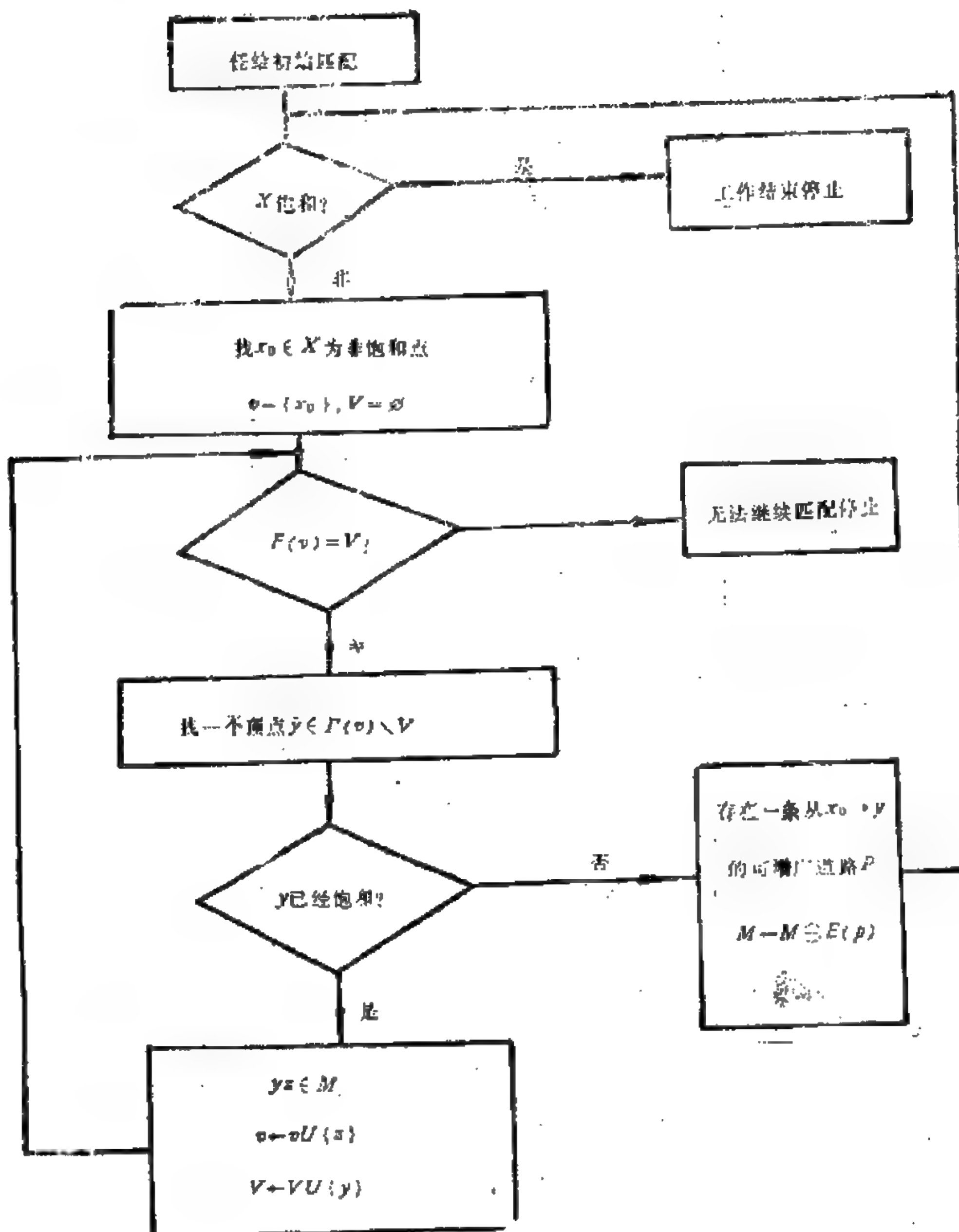
节点电路分析程序NODEQ是对RLC－g_m网络进行正弦稳态分析的程序。

(1) 框图： (见P.177)

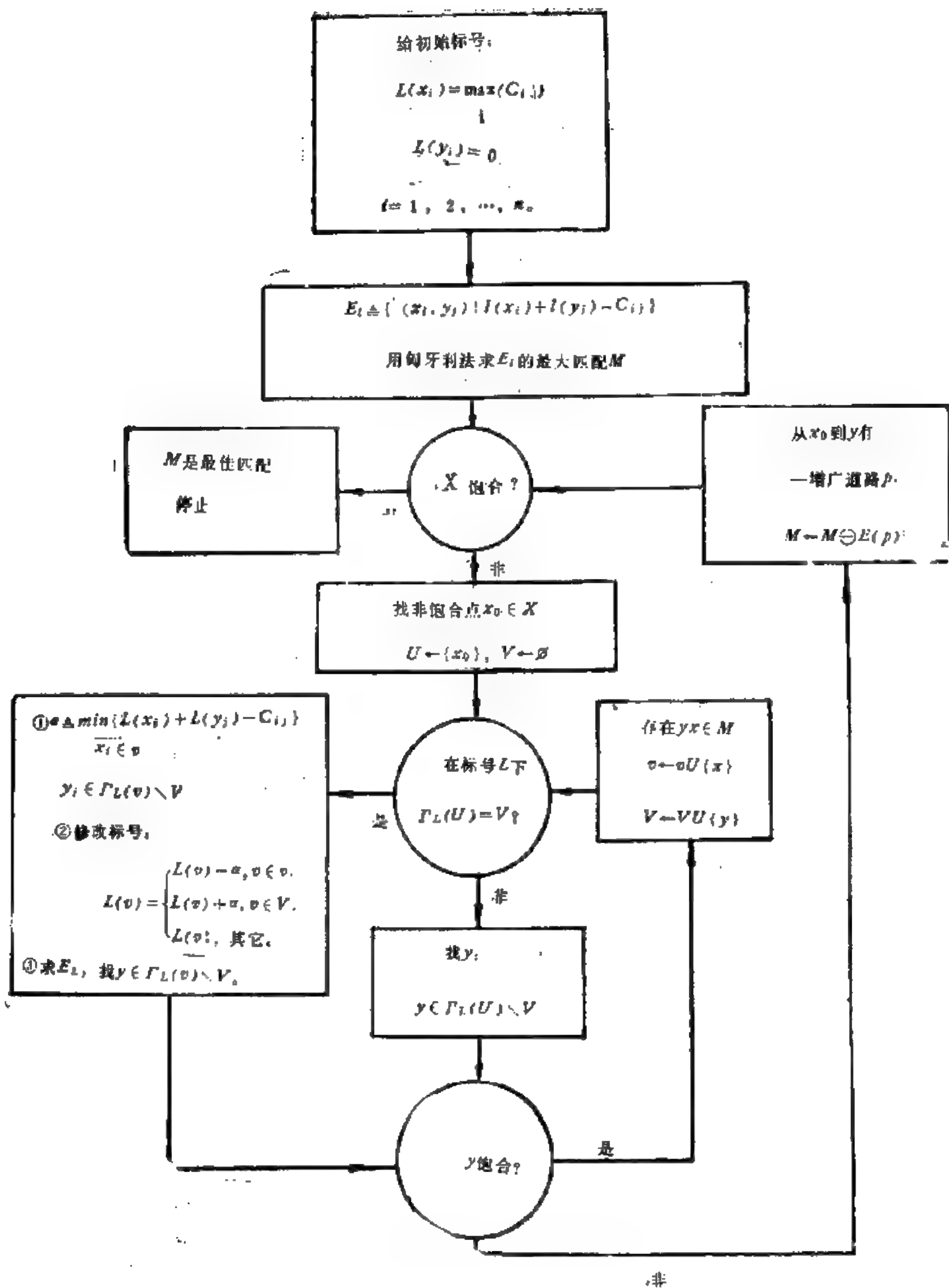
(2) 程序：

```
C     NODEQ MAINPROGRAM
      DIMENSION LO(50), MO(50), IELEM(50), VALUE(50),
     1 E(50,2), C(50,2), VINT(50), CINT(50), LA(10),
     2 MA(10), ALP(10), VN(20,2), BE(20,2)
```

(接P.178)

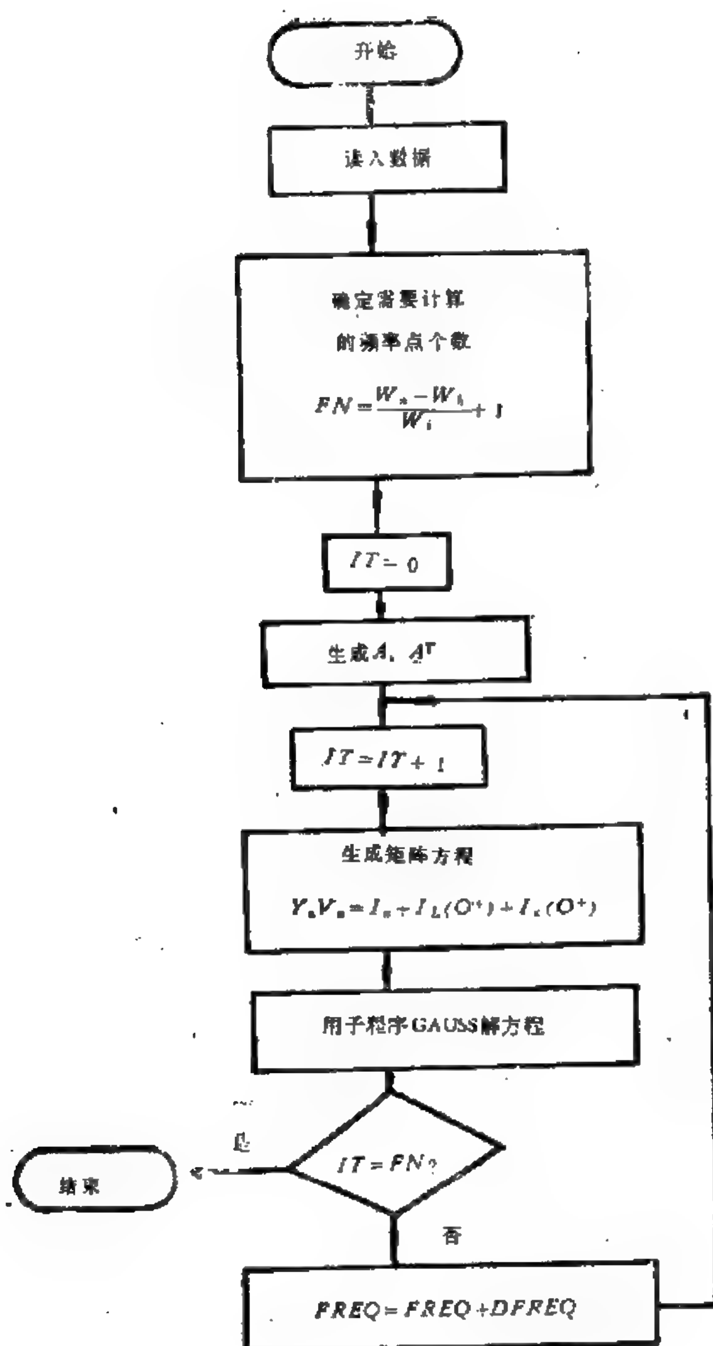


(求最大匹配的匈牙利算法框图)



给初始标号：
$L(x_i)=\max_j(C_{ij})$
$L(y_j)=0$
$i=1, 2, \cdots, n$。
$E_l \triangleq \{(x_i, y_j) \mid l(x_i)+l(y_j)=C_{ij}\}$
用匈牙利法求E_l的最大匹配M
M是最佳匹配
停止
X饱合？
是
非
从x_0到y有
一增广道路p
$M \leftarrow M \ominus E(p)$
找非饱合点$x_0 \in X$
$U \leftarrow \{x_0\}$，$V \leftarrow \varnothing$
①$\alpha \triangleq \min\{L(x_i)+L(y_j)-C_{ij}\}$
$x_i \in v$
$y_j \in \Gamma_L(v) \setminus V$
②修改标号：
$L(v)=\begin{cases} L(v)-\alpha, v \in v, \\ L(v)+\alpha, v \in V, \\ L(v), \text{其它。} \end{cases}$
③求E_L，找$y \in \Gamma_L(v) \setminus V$。
在标号L下
$\Gamma_L(U)=V$？
是
存在$yx \in M$
$v \leftarrow vU\{x\}$
$V \leftarrow VU\{y\}$
非
找y：
$y \in \Gamma_L(U) \setminus V$
y饱合？
是
非

（求最佳匹配的算法图框）



（节点电路分析的算法框图）

```
      COMMON A(20,50), T(50,20)/C1/YE(50,50,2)/
    1 C2/XL(50,50)/C3/YN(20,20,2)/C4/R(20,50,2)/C5/
    2 D(50,2), P(50,2), VL(50)
      READ(5,100) FREQI, FREQF, DFREQ
      READ(5,105)N, MB, MAS
      DO 5 I=1, MB
      READ(5,110)LO(I), MO(I), IELEM(I), VALUE(I),
    1 E(I,1), C(I,1), VINT(I), CINT(I)
    5 WRITE(6,110) LO(I), MO(I), IELEM(I), VALUE(I),
    1 E(I,1), C(I,1), VINT(I), CINT(I)
      DO 10 I=1, MAS
   10 READ(5,115) LA(I), MA(I), ALP(I)
      WRITE(6,120) FREQI, FREQF, DFREQ
      WRITE(6,125)N, MB, MAS
      IT=0
      FREQ=FREQI
      IF(FREQF)20, 15, 20
   15 IFIN= 1
      GO TO 22
   20 IFIN=(FREQF-FREQI)/DFREQ+1
   22 CALL FORMA (N,MB,LO,MO)
   25 IT=IT+1
      CALL FORMYE (MB,MAS,FREQ,IELEM,VALUE,LA,
    1 MA,ALP)
      CALL FORMYN (N,MB)
      CALL FORMBE (N,MB,FREQ,C,E,VINT,CINT,BE)
      CALL GAUSS (N,BE,VN)
      FREQ=FREQ+DFREQ
      IF(IT.LT.IFIN) GO TO 25
  100 FORMAT (3F10.0)
  105 FORMAT (3I5)
  110 FORMAT (3X,I2,3X,I2,2X,I3,5F10.1)
  115 FORMAT(3X,I2,3X,I2,5X,F10.0)
  120 FORMAT (8X,3HLOW,2X,F10.0,2HHZ,5X,4HHIGH,
    1 2X,F10.0,2HHZ,5X,4HSTEP,2X,F10.0,2HHZ)
  125 FORMAT (8X,4HNODE,2X,I2,5X,6HBRANCH,2X,
    1 I2,5X,16 HDEPENDENT SOURCE 2X,I2)
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE FORMA (N, B, LO, MO)
      INTEGER B
      DIMENSION LO(N), MO(N)
      COMMON A(20,50), T(50,20)
      DO 5 I=1, N
      DO 5 J=1, B
      A(I,J)=0.0
    5 T(J,I)=0.0
      DO 10 I=1, B
      L=LO(I)
      A(L,I)=1.0
      T(I,L)=1.0
      M=MO(I)
      A(M,I)=-1.0
   10 T(I,M)=-1.0
      WRITE(6, 30)
      DO 20 I=1, N
   20 WRITE(6,25) (A(I,J),J=1,B)
   25 FORMAT(/5X,20F 4.0)
   30 FORMAT(//3X,16HINCIDENCE MATRIX)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FORMYE (B,MAS,FREQ,IELEM,VALUE,
     1  LA,MA,ALP)
      INTEGER B,R,C
      DIMENSION IELEM(B),VALUE(B),LA(B),MA(B),
     1  ALP(B)
      COMMON/C1/YE(50,50,2)/C2/XL(50,50)
      DATA R, C, L/333, 666, 999/
      DO 5 J=1, 50
      DO 5 I=1, 50
      YE(I,J,1)=0.0
      YE(I,J,2)=0.0
    5 XL(I,J)=0.0
      DO 50 I=1, B
      IF(IELEM(I)-R) 20, 30, 20
   20 IF(IELEM(I)-C) 25, 35, 25
   25 IF(IELEM(I)-L) 55, 45, 55
   30 YE(I,I,1)=1.0/VALUE(I)
```

```
      GO TO 50
35    YE(I,I,2) = VALUE(I) * FREQ
      GO TO 50
45    YE(I,I,2) = -1.0/(VALUE(I) * FREQ)
      XL(I,I) = VALUE(I)
50    CONTINUE
55    DO 60 I = 1, MAS
      LD = LA(I)
      MD = MA(I)
60    YE(MD,LD,1) = ALP(I)
      WRITE(6,65) FREQ
65    FORMAT(////8X,16HTHE FREQVENCY IS,2X,
     1 F10.2)
      WRITE(6,70)
70    FORMAT(//8X, 26 HTHE REAL PART OF YE
     1 MATRIX)
      WRITE(6,80) ((YE(I,J,1), J = 1,B),I = 1,B)
      WRITE(6,75)
75    FORMAT(//8X, 31HTHE IMAGINERY PART OF
     1 YE MATRIX)
      WRITE(6,80) ((YE(I,J,2), J = 1,B), I = 1, B)
80    FORMAT (5X,6E 10.2)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FORMBE(N,B,FREQ,C,E,VINT,CINT,
     1 BE)
      INTEGER B
      DIMENSION BE(N,2), C(B,2), E(B,2), VINT(B),
     1 CINT(B)
      COMMON A(20,50)/C1/YE(50,50,2)/C2/XL(50,50)
     1 /C5/D(50,2), P(50,2), VL(50)
      DO 10 I = 1, B
      C(I,2) = 0.0
      VL(I) = XL(I,I) * CINT(I)
      E(I,1) = E(I,1) - VL (I),
      E(I,2) = -VINT(I)/FREQ
      D(I,1) = 0.0
      D(I,2) = 0.0
      DO 5 J = 1, B
```

```
      CALL CXMPY (YE(I,J,1), YE(I,J,2), E(J,1), E(J,2),
     1 P(J,1), P(J,2))
      D(I,1) = D(I,1) + P(J,1)
    5 D(I,2) = D(I,2) + P(J,2)
      C(I,1) = C(I,1) + D(I,1)
   10 C(I,2) = C(I,2) + D(I,2)
      DO 15 I = 1, N
      BE(I,1) = 0.0
      BE(I,2) = 0.0
      DO 15 J = 1, B
      BE(I,1) = BE(I,1) + A(I,J) * C(J,1)
   15 BE(I,2) = BE(I,2) + A(I,J) * C(J,2)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FORMYN(N,B)
      INTEGER B
      COMMON A(20,50),T(50,20)/C1/YE(50,50,2)/C3/
     1 YN(20,20,2)/C4/R(20,50,2)
      DO 5 J = 1, B
      DO 5 I = 1, N
      R(I,J,1) = 0.0
      R(I,J,2) = 0.0
      DO 5L = 1, B
      R(I,J,1) = R(I,J,1) + A(I,L) * YE(L,J,1)
    5 R(I,J,2) = R(I,J,2) + A(I,L) * YE(L,J,2)
      DO 10 J = 1, N
      DO 10 I = 1, N
      YN(I,J,1) = 0.0
      YN(I,J,2) = 0.0
      DO 10 L = 1, B
      YN(I,J,1) = YN(I,J,1) + R(I,L,1) * T(L,J)
   10 YN(I,J,2) = YN(I,J,2) + R(I,L,2) * T(L,J)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GAUSS(N,BE,VN)
      DIMENSION BE(N,2),VN(N,2),CC(2),DD(2),EE(2),
      COMMON/C3/YN(20,20,2)
      NM1 = N - 1
      DO 10 K = 1, NM1
```

```
      CC(1) = YN(K,K,1)
      CC(2) = YN(K,K,2)
      KP1 = K+1
      CALL CXDIV(1.0,0.0,CC(1),CC(2),CC(1),CC(2)).
      CALL CXMPY (BE(K,1),BE(K,2),CC(1),CC(2),
   1  BE(K,1), BE(K,2))
      DO 10 J = KP1,N
      CALL CXMPY(YN(K,J,1),YN(K,J,2),CC(1),CC(2),
   1  YN(K,J,1), YN(K,J,2))
      DO 5 I = KP1, N
      CALL CXMPY CYN(I,K,1), YN(I,K,2),YN(K,J,1),
   1  YN(K,J,2), DD(1),DD(2))
      YN(I,J,1) = YN(I,J,1) - DD(1)
   5  YN(I,J,2) = YN(I,J,2) - DD(2)
      CALL CXMPY (YN(J,K,1), YN(J,K,2), BE(K,1),
      BE(K,2), EE(1), EE(2))
      BE(J,1) = BE(J,1) - EE(1)
  10  BE(J,2) = BE(J,2) - EE(2)
      CALL CXDIV(BE(N,1),BE(N,2),YN(N,N,1),
   1  YN(N,N,2), VN(N,1), VN(N,2))
      DO 20 K = 1, NM1
      I = N - K
      CC(1) = 0.0
      CC(2) = 0.0
      IP1 = I+1
      DO 15 J = IP1, N
      CALL CXMPY(YN(I,J,1), YN(I,J,2), BE(J,1),
   1  BE(J,2), DD(1), DD(2))
      CC(1) = CC(1) + DD(1)
  15  CC(2) = CC(2) + DD(2)
      VN(I,1) = BE(I,1) - CC(1)
  20  VN(I,2) = BE(I,2) - CC(2)
      DO 30 I = 1, N
  30  WRITE (6.130)I, VN(I,1), VN(I,2,
 130  FORMAT(/5X,2HV(,I2,2H)=,E10.3, 2H+J, E10.3)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CXMPY(X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3)
      X3 = X1*X2 - Y1*Y2
```

```
Y3 = X1 * Y2 + X2 * Y1
RETURN
END
SUBROUTINE CX DIV(X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3)
X3 = (X1 * X2 + Y1 * Y2)/(X2 * X2 + Y2 * Y2)
Y3 = (X2 * Y1 - X1 * Y2)/(X2 * X2 + Y2 * Y2)
RETURN
END.
```

八、图的应用

自然界和人类社会中的大量事物以及事物间的关系，常可用图形来描述。例如，物质结构、电气网络、城市规划、交通运输、信息传送、工作调配、事物关系等均可用点和线连接起来的图模拟。

图论通过点和线的构形来构成模拟各类系统的数学模型，并根据图的性质进行分析，提供研究各种系统的科学的、巧妙的方法。任何一个包含了某种二元关系的系统都可以用图论的方法分析，而且它往往具有形象直观的特点。图论中应用的线形图与几何图不同，每条边均可赋权，从而组成加权图，用之来研究系统特性，进行决策分析，确定最优设计，调整经济管理等等。

由于上述原因，图论的研究具有十分广阔的客观原型，并在许多领域中有着极其广泛的应用。这些领域包括：管理科学、心理学、理论物理学、统计力学、概率论、线性规划、运筹学、拓扑学、经济学、计算机科学、场论、模式识别、生物学、建筑学、语言学、遗传学、法律学、化学等等。

在这里，将按几种典型课题简介图论应用的一般原理和方法。这些课题包括：

（一）网络上的流及其应用；

（二）电路网络；

（三）开关网络；

（四）运输网络；

（五）信号流图；

（六）色数问题应用简例；

（七）服务点设置问题简例。

（一）网络上的流及其应用

1. 概念

（1）网络：设$N=(V, U)$为一有向图．若在V中有两个不同顶点子集X和Y（X、Y不相交和非空），而且在弧集U上定义了一个非负整数值函数C，则称N为一个网络．（常称为运输网络）．

源：X中的顶点称为源．

汇：Y中的顶点称为汇．

中间顶点（中转点）：既非源又非汇的顶点，称为中间顶点（中转点）．

容量函数，函数C称为N的容量函数．

容量：容量函数C在弧a上的值称为a的容量．记作$C(a)$或$C(i, j)$。

（2）相容的网络：满足条件：

$$0 \leqslant f(i, j) \leqslant C(i, j)$$

的网络N称为是相容的（其中$f(i, j)$示弧（i，j）上的流）．

（3）守恒的网络：满足条件

$$f(i, V)-f(V, i)=\begin{cases} f_{x,y}, & 当\ i=x, \\ 0, & 当\ i\neq x\neq y,\ 对所有的\ i\in V, \\ -f_{x,y}, & 当\ i=y. \end{cases}$$

的网络N称为是守恒的．其中

$f(V_1, V_2)=\sum_{(i,j)\in(V_1,V_2)} f(i, j)$；

$f(i, V)$表示从顶点i流出的流的和；

$f(V, i)$表示流向顶点i的流的和；

$f_{x,y}$表示从源x流出的流；

$-f_{x,y}$表示流入y的流。

（4）网络N的流：网络N的每一条弧上的流的集合$\{f(i, j), (i, j)\in U\}$称为网络N的流，记作F，即

$$F=\{f(i, j), (i, j)\in U\}$$

（5）可行流：若网络N满足条件：

$0\leqslant f(i, j)\leqslant C(i, j)$；

$$f(i, V)-f(V, i)=\begin{cases} f_{x,y}, & 当\ i=x, \\ 0, & 当\ i\neq x\neq y,\ 对所有的\ i\in V, \\ -f_{x,y}, & 当\ i=y. \end{cases}$$

则称F是网络N上的可行流，$f_{x,y}$称为流F的值。

（6）饱和弧：若一条弧的流等于该弧的容量，即$f(i, j)=C(i, j)$，则称弧（i，j）为饱和弧，否则就称非饱和弧。

（7）割（截集）：设$N=(V, U)$是具有单一源x和单一汇y的一个运输网络．N中的割K是形如$(V_1, \bar{V})$的弧的集合，其中$x\in V_1$，$y\in\bar{V}_1$，而$V_1\subseteq V$．

（8）网络N中的路：设N为一网络，N中相异顶点序列v_{i_1}，v_{i_2}，…，v_{i_n}具有下列性质：对任意的r（$r=1, 2, \cdots, n$）或者$(v_{i_r}, v_{i_{r+1}})$是一条弧或$(v_{i_{r+1}}, v_{i_r})$是一条弧，两者不能同时出现，由这样一些弧组成的序列称为N中由v_{i_1}到v_{i_n}的路。

（9）前（后）向弧：设顶点序列v_i，…，v_p，v_q，…，v_j构成网路$N=(V, U)$的一条路，则当$(v_p, v_q)\in U$时，称(v_p, v_q)为该路上的前向弧；当$(v_q, v_p)\in U$时，称(v_q, v_p)为该路上的后向弧。

（10）可（不可）增广路：逐次增加$f_{x,y}$，使N的自x到y的全部路中的任何一条，其中至少有一条前向弧被饱和，和一条后向弧的流为零，具有这种条件的路称为不可增广路；否则，称为可增广路。

（11）环流问题：设网络$\mathscr{N}_T=[N, \mathscr{A}]$上无源(发点)与汇（收点），而每一点都是中转点，并且每条弧上的容量均给定两个非负整数l与c，其中

$0\leqslant l\leqslant c$

要求其上的流f，满足条件：

$f(x, N)-f(N, x)=0$，$x\in N$；

$l(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant c(x, y)$，$(x, y) \in \mathscr{A}$，

则称此为环流问题．上述网络称为环流网络。

（12）环流向量：在有向图$G=(X, U)$的弧组上，定义整函数$f(x, y)$，使其满足条件：

$f(X, x)-f(x, X)=0$，$x \in X$．

流f称为环流f，在每个顶点满足平衡条件．设G共含m条弧，将每条弧编号，环流便成一个m维向量，称为环流向量，记为$\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_m)$。

环流空间：所有上述的环流向量构成一个m维向量子空间，称为环流空间．

（13）势差：在弧组U上再定义整函数θ，每个整函数θ同样定义一个m维向量：

$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m)$；

若向量θ满足条件

$$\langle \mu, \theta \rangle=\sum_{i=1}^{m} \mu_i \theta_i=0$$

对一切圈μ均成立，则θ称为势差．其元素构成m维向量，称为势差向量．同样，所有这样的势差向量构成一个m维向量子空间，称为势差空间．

2．定理

（1）设运输网络N的一个自x到y的流是F，其值为$f_{x, y}$，且令$(V_1, \bar{V}_1)$为分离x和y的任何一个割$\Longrightarrow$

$f_{x, y}=f(V_1, \bar{V}_1)-f(\bar{V}_1, V_1)$．

（2）对于运输网络N中的任意流F的值$f_{x, y}$和任意割$(V_1, \bar{V}_1)$ $\Longrightarrow$

$f_{x, y} \leqslant C(V_1, \bar{V}_1)$．

（3）最大流值小于或等于最小割容量，即

$\max[f_{x, y}] \leqslant \min[c(k)]$．

（4）（最大流最小割定理）在任何运输网络中，最大流的值等于最小割的容量，即

$$\max[f_{x, y}]=\min[c(k)]$$．

[注]推广：

①多个源(v_{x_i})和汇(v_{y_j})的网络（$i=1, \cdots, r$；$j=1, \cdots s$）：置入二顶点v_x和v_y，v_x作为新的源，v_y作为新的汇；连接新的弧(x, x_1)，(x, x_2)，$\cdots$，(x, x_r)和(y_1, y)，(y_2, y)，$\cdots$，(y_s, y)；同时指定它们的容量均为$+\infty$．这样就化为一个源x和一个汇y的网络．在得到最大流后，则通过v_{x_i}的物资均由v_{x_i}发送，经由v_{y_j}的物资均由v_{y_j}收留．

②顶点具有容量的网络．将每个顶点v_i分为二顶点v_i'和v_i''，同时在v_i'和v_i''间连一条弧(v_i', v_i'')；并约定所有可达v_i的顶点都改为到达v_i'；而把所有的弧(v_i, v_j)改为(v_i'', v_j)并给弧(v_i', v_i'')以容量$c(v_i', v_i'')=c(v_i)$；而将原有各弧均令其容量为$+\infty$．这样即可将顶点也具容量的网络上的最大流问题化为我们已讨论过的网络上的问题了．

（5）（M. Hall）任给含n个元素的集$y=\{1, 2, \cdots, n\}$及其m个子集X_1，X_2，$\cdots$，X_m，这些子集有相异代表系$\Longleftrightarrow |S_k| \leqslant |Y_k|$（$k=1, 2, \cdots, m$），其中$S_k$是$m$个子集中任取的$k$个子集，$Y_k$是这$k$个子集的合．符号"$|\,|$"表示集合所含元素的个数．

（6）在一网络$\mathscr{N}_T=[N, \mathscr{A}]$中（为解决供求问题），

$f(x, N)-f(N, x) \leqslant a(x) \qquad (x \in S)$

$$f(x, N)-f(N, x)=0 \qquad (x\in R)$$
$$f(N, x)-f(x, N)\geqslant b(x) \qquad (x\in T)$$
$$0\leqslant f(x, y)\leqslant c(x, y) \qquad (x, y)\in\mathscr{A}$$

（S示源，T示汇，R示中转点集）；以上条件是可行的$\Longleftrightarrow b(T\cap\bar{X})-a(S\cap\bar{X})\leqslant c(X, \bar{X})$，对每一$X\subseteq N$均成立。

(7) （为解决对称的供求问题）原网络$\mathscr{N}_T=[N, \mathscr{A}]$有可行流$\Longleftrightarrow$新网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*, \mathscr{A}^*]$有极大流$f^*$，其值为$a(S)+b(T)$。

[注]：我们可对供求问题提出更高的要求，即在供应点所能供应的数量在$a(x)$与$a'(x)$之间，假定其中$0\leqslant a(x)\leqslant a'(x)$；而在销售点所希望收到的数量在$b(x)$与$b'(x)$之间，假定其中$0\leqslant a(x)\leqslant a'(x)$；而在销售点所希望收到的数在$b(x)$与$b'(x)$之间，其中$0\leqslant b(x)\leqslant b'(x)$，将这样运输系统化成网络$\mathscr{N}_T=[N, \mathscr{A}]$，若能在此网络上给出流$f$，满足一切要求，这个流$f$便应满足以下条件：

$$a(x)\leqslant f(x, N)-f(N, x)\leqslant a'(x), \qquad x\in S \qquad (7.1)$$
$$f(x, N)-f(N, x)=0, \qquad x\in R \qquad (7.2)$$
$$b(x)\leqslant f(N, x)-f(x, N)\leqslant b'(x), \qquad x\in T \qquad (7.3)$$
$$0\leqslant f(x, y)\leqslant c(x, y), \qquad (x, y)\in\mathscr{A} \qquad (7.4)$$

其中$0\leqslant a(x)\leqslant a'(x)$，　　$0\leqslant b(x)\leqslant b'(x)$。

为解决此问题，先构造一个新网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*, \mathscr{A}^*]$，将原问题转化为新网络$\mathscr{N}_T^*$上求极大流的问题。

(8) 上述注中的条件（7.1）－（7.4）能满足

$$\Longleftrightarrow \quad c(X, \bar{X})\geqslant b(T\cap\bar{X})-a'(S\cap\bar{X}),$$
$$c(X, \bar{X})\geqslant a(S\cap X)-b'(T\cap X),$$

对一切$X\subseteq N$均成立。

(9) （为解决环流问题）环流网络$\mathscr{N}_T=[N, \mathscr{A}]$是可行的$\Longleftrightarrow$新网络$\mathscr{N}_T^*=[N^*, \mathscr{A}^*]$有极大流$f^*$，其值为$v(f^*)=l[N, N]$。

[注]新网络$\mathscr{A}_T^*=[N^*, \mathscr{A}^*]$是向原网络加进新发点$s$与新收点$t$，自$s$到$N$的每一点联弧$(s, x)$，自$N$的每一点到$t$联弧$(x, t)$并在新网络的每条弧上给定容量如下：

$$c^*(x, y)=c(x, y)-l(x, y), \quad (x, y)\in\mathscr{N}_T$$
$$c^*(s, x)=l(N, x), \qquad x\in N$$
$$c^*(x, t)=l(x, N), \qquad x\in N.$$

(10) 环流$\mathscr{N}_T=(N, \mathscr{A})$是可行的（即$f(x, N)-f(N, x)=0$与$l(x, y)\leqslant f(x, y)\leqslant c(x, y)$同时成立）$\Longleftrightarrow c(X, \bar{X})\geqslant l(\bar{X}, X)$，对一切$X\subseteq N$均成立。

(11) 网络$\mathscr{N}_T'=[N', \mathscr{A}']$，在其弧上给定函数$l$与$c$，$0\leqslant l\leqslant c\leqslant+\infty$，这个网络$\mathscr{N}_T'$有流$f$满足条件：

$$f(s, N)-f(N, s)=v,$$
$$f(x, N)-f(N, x)=0, \quad x\in N-\{s, t\}$$
$$f(N, t)-f(t, N)=v,$$
$$l(x, y)\leqslant f(x, y)\leqslant c(x, y), \quad (x, y)\in\mathscr{N}_T'$$

$\Longleftrightarrow c(X, \bar{X})\geqslant l(\bar{X}, X)$，对一切$X\subseteq N$均成立。

(12) 向量 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ 是一个势差$\Longleftrightarrow$在顶点集X，存在函数 $t(x)$，使在每个弧$u_i=(a, b)$上有$\theta_i=t(b)-t(a)$。

(13) 许可势差存在的必要条件是对任一圈μ均有：

$$\sum_{\mu^+} l_i - \sum_{\mu} c_j \leqslant 0 .$$

(14) 已给有向图$G=(X, U)$，在其每一弧 i 上，给定二数l_i与c_i，

$-\infty \leqslant l_i \leqslant c_i \leqslant +\infty$，

存在许可势差 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \Longleftrightarrow$ 对任一圈μ，有

$$\sum_{i \in \mu^-} c_i - \sum_{i \in \mu^+} l_i \geqslant 0 .$$

(15) 已给有向图$G=(X, U)$，在其每一弧 i 上给定二数l_i与c_i，

$-\infty < l_i \leqslant c_i < +\infty$，

且许可势差是存在的$\Longrightarrow$在某一固定弧"1"上，其极大势差是

$$\max \theta_1 = \min_{\substack{\mu \\ (1 \in \mu^+)}} \left(\sum_{i \in \mu^-} c_i - \sum_{\substack{i \in \mu^+ \\ i \neq 1}} l_i \right).$$

3. 方法

(1) 用标记法确定网络的最大流。

步骤：

A. 标号过程：

①给发点以标号$(+\bar{Z}, +\infty)$。

②选择一个已给标号的顶点x，对于x的所有未给标号的邻接点y，按下列规则处理：

i) 若边$(y, x) \in E$，y未给标号，而且$f_{yx} > 0$时，令$\delta_y = \min[f_{yx}, \delta_x]$，则$y$给以标号$(-x, \delta_y)$；

ii) 若边$(x, y) \in E$，y未给标号，而且$c_{xy} > f_{xy}$时，令$\delta_y = \min[c_{xy} - f_{xy}, \delta_x]$，则$y$给以标号$(+x, \delta_y)$。

③重复第②步直到收点Z被标记，或不再有顶点可以给标记为止。如若Z点给了标记说明存在一条可增广道路，故转向增广过程B。如若Z点不能获得标志，而且不存在其它可标记的顶点时，算法结束，所得的流便是最大流。

B. 增广过程：

①令$U=\bar{Z}$。

②若u的标号为$(+v, \delta)$，则

$f_{vu} \leftarrow f_{vu} + \delta \bar{Z}$。

若u的标号为$(-u, \delta)$，则

$f_{uv} \leftarrow f_{uv} - \delta \bar{Z}$。

③若$v=Z$，则把全部标记去掉，并转向标号过程A。如若不然，令$u=v$并回到增广过程的第②步。若从$\bar{Z}$到Z引一条虚拟的有向边$(\bar{Z}, Z)$，并给Z以标号。若遇到标号过程第②步的状态 i) 时，边(y, x)着以红色；若遇到状态ii) 时，边(x, y)着以黑色，其余的边属于向前的饱和边，或流量为零的后退边时，着以绿色，根据minty三色引理可知：或存在包含$(\bar{Z}, Z)$) 边，由红、黑色边组成的回路；或存在包含$(\bar{Z}, Z)$边，由黑绿色边组成的割切。前者为存在可增广道路，后者有最大流。

（2）实例：设有一个汽车运行线路如下（图8.1）：

在 a、c、d、e 各点均有汽车存放。设其存放量分别为S_a、S_c、S_d与S_e，b点紧需用汽车，须从这些点调运。各条线路上的 t 值，表示汽车运行所需单位时间数，即从 a 到 c 汽车运行需一个单位时间等等。从一点顺线路在每一个单位时间内所能运到另一点的汽车辆数为 C_{ij}，在本例便是C_{ac}、C_{cd}、C_{ad}、C_{cb}、C_{de}与C_{eb}。再假定在一个单位时间内每个点可以发出的汽车辆数为 p，在本例分别是P_a、P_c、P_d与P_e。问题是在 T 个单位时间后，b 处最多能收到多少辆汽车。譬如$T=5$，这个运输图，可化成网络如下（图8.2）：

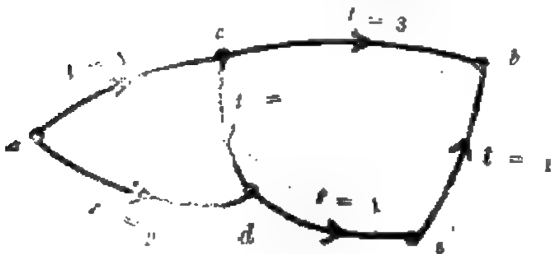


图8.1

取 S 为总发点，t 为总收点。在 5 个单位时间内，t 点上（亦即在 b 处）所能收集到汽车的极大辆数便是这个网络的极大流。图8.2中a_2到d_5无弧相联，表示：在两个单位时间以后，a 送车到 d，需两个单位时间，再从 d 送到 b，又需两个单位时间，共需 6 个单位时间，已在时限 5 个单位时间以外。a_3到c_5无弧相联，其意义是一样的。

图8.2

网络中横行弧上的容量为p_a、p_c、p_d、p_e等，下行的弧上的容量为C_{ac}，…，诸 b 到 t 的

弧上的容量均取∞。

(3) 网络流理论在图论上应用的几个重要结论：

①有向图下的蒙格尔定理[1927]见前二（三）－（36）。

②无向图下的蒙格尔定理，见前二（三）－（35）。

③在有向图 $G=(X, U)$ 里，任取二顶点 s 与 t，设 s 到 t 无弧 (s, t) 直接相通 $\Longrightarrow$ s 到 t 的顶点互质（除 s，t 外）的通路的极大个数等于截断所有自 s 到 t 的通路的极少顶点数。

④在无向图 $G=(X, E)$ 里，任取二非邻点 s 与 $t \Longrightarrow$ 自 s 到 t 的顶点互质的链的极大个数，等于截断自 s 到 t 的所有的链的极少顶点数。

⑤(Gale，[1958]) 在二分运输网络 $\mathcal{N}_T=[N, \mathscr{A}]$ 上有许可流，饱和所有的收入弧 $\Longleftrightarrow$

$$F(B) \geqslant d(B) \qquad (B \subset Y),$$

其中 $F(B)$ 是网络上可能送到 B $(B \subset Y)$ 的极大流量，$d(B)$ 是 B 到收点 t 的总容量。

⑥已给 n 个非负整数对 (r_1, s_1)，(r_2, s_2)，…，(r_n, s_n) 且

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n,$$

这些数对 (r_i, s_i) 恰是一个 n 阶 p-图（两顶点间在同一个方向上至多有 P 条弧）的出、入半次（即出次，入次）$\Longleftrightarrow$

$$1°)\quad \sum_{i=1}^{n} \min\{pk, ri\} \geqslant \sum_{j=1}^{k} s_j \quad (k=1, 2, \cdots, n-1);$$

$$2°)\quad \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{n} s_j.$$

⑦已给 n 个非负整数对 (r_1, s_1)，(r_2, s_2)，…，(r_n, s_n)，其中 $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots s$ 　　些对恰是一个 n-阶 p-图的出入半次 $\Longleftrightarrow$

$$1°)\quad \sum_{i=1}^{pk} r_i^* \geqslant \sum_{j=1}^{k} s_j \quad (k=1, 2, \cdots, n-1);$$

$$2°)\quad \sum_{i \geqslant 1} r_i^* = \sum_{j=1}^{n} s_j.$$

⑧已给非负整数列 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$，存在1-图，使 $d_G^+(x_i)=r_i$，$d_G^-(x_i)=1 \Longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = n.$$

⑨任给对称图 $G_0=(X, U)$，在其每一奇圈上总有顶点含一个或多个环，又任给非负整数列 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，G_0 含有部分图 H，在各顶点 x_i 上皆 $d_H^+(x_i)=d_H^-(x_i)=r_i \Longrightarrow G_0$ 必包含有对称的部分图 G，在各项点 x_i 上的出入次也是 r_i。即对所有的 i 有：

$$d_G^+(x_i)=d_G^-(x_i)=r_i.$$

⑩已给非负整数列

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_n$$

存在对称 p-图 G，具有性质

$$d_G^+(x_i)=d_G^-(x_i)=r_i \text{（对一切 } i \text{ 均成立）}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{pk} r_i^* \geqslant \sum_{j=1}^{k} r_i \ (k=1, 2, \cdots, n-1).$$

⑪已给n个非负整数对 (r_1, s_1), (r_2, s_2), $\cdots$, (r_n, s_n), 存在无环p-图H，取这些数对为其半次，即H具有性质

$$d_H^+(x_i)=r_i, \ d_H^-(x_i)=s_i \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\Longleftrightarrow (1^\circ) \sum_{i=1}^{n} \min\{r_i, \ p|A-x_i|\} \geqslant s(A), \ (A \subset X);$$

$$(2^\circ) \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{n} s_j.$$

⑫ (Fulkorson, Hoffman, McAndrew[1965]) 设$G_0=(X, U)$是一个n-阶无环对称图，其任二顶点互质奇长的初级圈，总有弧相联．并设$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$是一组非负整数其和为一偶数。令G_0有部分图H，具有性质$d_H^+(x_i)=d_H^-(x_i)=r_i$对一切$i$均成立$\Longrightarrow G_0$必有具此性质的对称部分图$G$，即$G$具性质

$$d_G^+(x_i)=d_G(x_i)=r_i \ (i=1, 2, \cdots, n).$$

⑬已给$p \geqslant 1$，$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_n \geqslant 1$且$\sum_{i=1}^{n} r_i=$偶数，存在无环对称$p$-图$G$，使

$$d_G^+(x_i)=d_G^-(x_i)=r_i \ (对一切\ i\ 均成立)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \min\{r_i, \ p\cdot|A-\{x_i\}|\} \geqslant \sum_{x_i \in A} r_i \ (A \subset X).$$

⑭已给n个非负整数$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，使$n$个球队在一场竞赛中，每二队均比赛$C$次，比赛结束后，$a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_n$能成为胜利记录

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant C_p(2n-p-1)/2 \ (p=1, 2, \cdots, n)$$

且上式，当$p=n$时取等号。

⑮已给非负整数$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，存在竞赛图，取$a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_n$为各顶点的外半次

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant p(2n-p-1)/2 \qquad (p=1, 2, \cdots, n);$$

且上式，当$p=n$时取等号。

（二） 电路网络

(1) 克希荷夫定律——电路问题。

假设一电路网络的图有n个顶点m条边。

令关联矩阵：$B=(b_{ij})_{n\times m}$

回路矩阵：$C=(c_{ij})_{(m-n+1)\times m}$

各边电流：$I=\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix}$，各边电压：$V_e=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$。

①克希荷夫电流定律表述为：对于每一结点，流入该点电流的代数和为零，即

$$\sum_{k=1}^{m} b_{jk} i_k(t) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

或简记作

$$\mathbf{BI} = \mathbf{0}.$$

②克希荷夫回路定律表达为：沿着任一回路 C，电压降的代数和为零，即

$$\sum_{k=1}^{m} C_{jk} V_k(t) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m-n+1.$$

或简记作

$$\mathbf{CV}_e = \mathbf{0}.$$

③广义欧姆定律：

$$\mathbf{V}_e(P) = \mathbf{Z}(P)\mathbf{I}(P) + \mathbf{E}(P).$$

其中边电流 $i(t)$ 的拉氏变换 $\mathbf{I}(P)$ 为 m 维列向量，$\mathbf{V}_e(P)$ 为边电压的拉氏变换，也是 m 维列向量。$\mathbf{Z}(P) = (\mathbf{Z}_{ij}(P))_{m\times m}$ 称为阻抗矩阵。

上述 $\mathbf{BI} = \mathbf{0}$ 有 $n-1$ 个独立方程；$\mathbf{CV}_e = \mathbf{0}$ 有 $m-n+1$ 个独立方程；广义欧姆定律有 m 个独立方程，总计有 $2m$ 个独立方程．联立解出 $\mathbf{I}(P)$、$\mathbf{V}(P)$．作拉氏变换给出电路的解．

（2）状态变量法（为解决当 m 充分大时上述的电路问题）

状态变量法的一般步骤：

先从网络图中找出一棵树，它的树枝包含了所有的电容、电压源和部分电阻，这棵树称之为正常树．它的余树的边包含了所有的电感、电流源和部分电阻．

令 V_l、I_l 分别表示电感 l 边的电压和电流；

V_{cs}、I_{cs} 分别表示有电流源的边的电压和电流；

V_R、I_R 分别表示有电阻 R 边的电压和电流；

V_c、I_c 分别表示有电容 C 边的电压和电流；

V_{VS}、I_{VS} 分别表示有电压源边的电压和电流；

V_G、I_G 分别表示有导纳 G 边的电压和电流。

$$\begin{bmatrix} V_l \\ V_{cs} \\ V_R \\ I_C \\ I_{VS} \\ I_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ 0 & 0 & 0 & K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & 0 & K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ -K_{11}^T & -K_{21}^T & -K_{31}^T & 0 & 0 & 0 \\ -K_{12}^T & -K_{22}^T & -K_{32}^T & 0 & 0 & 0 \\ -K_{13}^T & -K_{23}^T & -K_{33}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l \\ I_{CS} \\ I_R \\ V_C \\ V_{VS} \\ V_G \end{bmatrix}$$

由上可得

$$\begin{cases} V_L = L\dfrac{dI_L}{dt} = K_{11}V_C + K_{12}V_{VS} + K_{13}V_G, \\ I_C = C\dfrac{dV_C}{dt} = -K_{11}^T I_L - K_{21}^T I_{CS} - K_{31}^T I_R. \end{cases} \qquad \cdots\cdots (*)$$

$$\begin{cases} V_R = RI_R = K_{31}V_C + K_{32}V_{VS} + K_{33}V_G, \\ I_G = GV_G = -K_{31}^T I_L - K_{32}^T I_{VS} - K_{33}^T I_R. \end{cases} \qquad \cdots\cdots(**)$$

$$\begin{cases} V_{CS} = K_{21}V_L + K_{22}V_{CS} + K_{23}V_G, \\ I_{VS} = -K_{12}^T I_L - K_{22}^T I_{CS} - K_{32}^T I_R. \end{cases} \qquad \cdots\cdots(***)$$

由（*）得

$$\frac{dI_L}{dt} = L^{-1}K_{11}V_C + L^{-1}K_{12}V_{VS} + L^{-1}K_{13}V_G.$$

$$\frac{dV_C}{dt} = -C^{-1}K_{11}^T I_L - C^{-1}K_{21}^T I_{CS} - C^{-1}K_{31}^T I_R$$

令

$$X = \begin{pmatrix} I_L \\ V_C \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} I_{CS} \\ V_{VS} \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & L^{-1}K_{11} \\ -C^{-1}K_{11}^T & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & L^{-1}K_{12} \\ -C^{-1}K_{21}^T & 0 \end{pmatrix} U$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & L^{-1}K_{13} \\ -C^{-1}K_{31}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_R \\ V_G \end{pmatrix}$$

由（**）得

$$\begin{pmatrix} I_R \\ V_G \end{pmatrix} = DX + EU.$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} I_{11} & -R^{-1}K_{33} \\ G^{-1}K_{33}^T & I_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & R^{-1}K_{31} \\ -G^{-1}K_{23}^T & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} I_{11} & -R^{-1}K_{33} \\ G^{-1}K_{33}^T & I_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & R^{-1}K_{32} \\ -G^{-1}K_{23}^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{dX}{dt} = MX + NU.$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L^{-1}K_{11} \\ -C^{-1}K_{11}^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & L^{-1}K_{13} \\ -C^{-1}K_{31}^T & 0 \end{pmatrix} D,$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & L^{-1}K_{12} \\ -C^{-1}K_{21}^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & L^{-1}K_{13} \\ -C^{-1}K_{31}^T & 0 \end{pmatrix} E,$$

另外，

$$\begin{pmatrix} V_{CS} \\ I_{VS} \end{pmatrix} = FX + GU.$$

中其

$$F=\begin{pmatrix}0 & K_{11}\\ -K_{12}^{T} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & K_{13}\\ -K_{32}^{T} & 0\end{pmatrix}D,$$

$$G=\begin{pmatrix}0 & K_{22}\\ -K_{22}^{T} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & K_{23}\\ -K_{32}^{T} & 0\end{pmatrix}E.$$

综上，只要解出X，即可通过它而获得电路网络中的其余变量；我们称X为状态变量；它可通过解一线性微分方程组而求得。此外，网络系统的稳定性也易由之解决。状态变量法对于利用电子计算机来设计电路起重大的作用。

(3) 状态方程的编写步骤

①根据给定网络N作出线形图G。

②从图G中选出正规树T，以树支电容上电压及连支电感中电流（或电荷与磁链）为状态变量。

③写出支路方程VCR（支路的电压、电流关系方程），按以下次序排列：

i）树支电容与连支电感的VCR方程；

ii）其它支路的VCR方程。

④按选定正规树T，写出基本回路方程与基本割集方程，即KVL与KCL，并按③次中序排列。

⑤从VCR方程中消去非状态变量项。

⑥将方程式整理化简，使之呈状态方程的正规形式：

$$\dot{X}=BX+BU.$$

(4) 无源网络的拓扑分析、有源网络的拓扑分析。（从略）。

（三）开关网络

1. 概念

(1) 开关：开关是一个两端元件，它具有两个状态：短路状态与开路状态。在短路状态，开关两端之间有条通路，使电流能够双向流过；在开路状态，开关两端之间不存在通路（用“1”示短路状态，用“0”示开路状态。）

(2) 开关网络：开关网络是由开关组成的无向网络。

(3) 路径集合：路径集合是一些变量的集合，这些变量属于一个开关网络两端之间的一条路径的各边。

路径乘积：一个路径乘积是属于一个路径集合的变量的乘积。

(4) 开关函数与固有形式：一个开关函数F_{ij}是一个开关网络的两个端点v_i与v_j之间的所有路径乘积的和。凡是表示为变量乘积之和的函数都被称为固有形式的函数。

(5) 冗余项：若A和AB是一个开关函数的两项，则AB称为A的冗余项。这里A和B可以是单个变量，也可以是变量乘积。

(6) 最小化：若以最小数目的开关实现了一个给定的开关函数，则此开关网络是最小化的。

(7) 不可分二端图：当一条边x_0被联接到一个二端图的两端，所形成的图是不可分图时，这个二端图被定义为不可分二端图。

(8) 连接矩阵：一个具有v个节点的开关网络的连接矩阵是一个$v\times v$阶的矩阵

$C = [C_{ij}]$

其中，$c_{ij} = 1$，对所有 i；

$c_{ij} = 0$，若在节点 i 与 j 之间没有直接连接着一条边；

c_{ij} = 所有直接连接在节点 i 与 j 之间的边的变量之和。

无向图的连接矩阵是一个对称矩阵。

(9) 连接矩阵C的 c_{ij} 及 $per\ C_{ij}$：C_{ij} 为划去连接矩阵C中第 i 行和第 j 行的子矩阵的行列式。展开 c_{ij}，各项均取正值，所得之和称为 $perc_{ij}$。

(10) G_{s}：在图 G 上把一条有向边连接到节点 v_i 与 v_j 之间，假定方向是由 v_i 指向 v_j，这条有向边记作为 $x_s(v_i,\ v_j)$，所得到的图称为 G_s。G_s 的连接矩阵记作 C_s。

(11) SC 网络：在一个开关网络里，若任何一个开关的状态均与其它开关的状态无关（互补状态为有关），则此开关网络称为 SC 网络。

SC函数：SC网络的开关函数称为 SC 函数。

(12) 路径矩阵：一个网络的路径矩阵P是一个 $m \times e$ 阶的矩阵，这里 m 是在端点 v_i 与 v_j 之间所有路径的个数，e 是网络的边数。路径矩阵为

$$P = [p_{ij}]$$

其中，

$p_{ij} = 1$，当第 j 条边位于第 i 个路径上；

$p_{ij} = 0$，当第 j 条边不在第 i 个路径上。

(13) 基本路径矩阵：一个基本路径矩阵 P_f 是一个 $e - v + 2$ 行的矩阵，它对应于开关网络两端之间的 $e - v + 2$ 条独立路径的集合。（P_f 是 P 的一个子阵，其秩亦为 $e - v + 2$）。

(14) 奇环和：设 $S = \{s_1,\ s_2,\ \cdots s_n\}$，其中 $s_1,\ s_2,\ \cdots s_n$ 是元素的集合。在 S 中的奇数个集合的环和称为奇环和。

偶环和：在 S 中偶数个集合的环和称为偶环和。

(15) 边开路变换：令 F 中所有 $x_i = 0$，所得到的函数 $F(x_i = 0)$ 定义为 F 对于 x_i 的边开路变换。

(16) 边短路变换：令 F 中所有 $x_i = 1$，然后删去冗余项，所得到的函数 $F(x_i = 1)$ 定义为 F 对于 x_i 的边短路变换。

(17) 端点变换：已知一个有 e 个变量的SC函数 F。它是一个 SC 网络（具有 e 个边和 v 个节点）的以 v_i 与 v_j 为端点的开关函数。对 F 作下列运算，得到新函数 $F_s(w_s)$，定义为 F 对 x_s 的两个新端点 v_i' 与 v_j' 的端点变换：

a）若在 v_i' 与 v_j' 两个端点之间没有直接跨接一条边 x_s，就在这两端点之间连接一条边 x_s，再找出端点 v_i 与 v_j 之间经过 x_s 的一条路径。

b）在 F 中取 R（$= e - v + 2$）个独立项，其中包含 x_s 的记作 f_{1i}（$i = 1,\ 2 \cdots$）。不包含 x_s 的记作 f_{2j}（$j = 1,\ 2 \cdots$）。若在第 1 步中添加了边 x_s，则把那个包含 x_s 的路径乘积记作 f_{11}，而在 F 中取 R 个独立项作为 f_{2j}。

c）作 $f_{1i}' = f_{1i} \oplus x_s$（$i = 1,\ 2,\ \cdots$），然后作 $f_{1i}' \oplus f_{2j}$（$j = 1, 2, \cdots$）以及 $f_{1i} \oplus f_{1i}$（$i \neq 1$），这些环和记作 f_l（$l = 1,\ 2,\ \cdots$）。

d）在 f_l 中作所有可能的奇环和，与 f_l 在合一起，然后删去去冗余项、余下各项之和加

上x_k（若是x_0，则不需要加）就形成了$F_e(x_k)$。若添加了x_0，则记为$f_e(x_0)$。

（18）奇环和条件：设一个n行的矩阵M的秩为R。若M的任意R个独立行的非冗余奇环和连同这R行一起构成M的n个行，则M满足奇环和条件。

（19）SP网络与SP函数：在一个开关网络中，若对任一变量x，最多有两个边与之对应，其中一个对应于x，另一个对应于x'，则此开关网络称之为SP网络。SP网络的开关函数称之为SP函数。

（20）0-路径：一个同时含有某个变量和它的补的路径称为0-路径。

2．定理

（1）开关网络的连接矩阵的任意一个$\mathrm{per}c_{ij}$（$i \neq j$）是以节点v_i和v_j为两端的二端开关网络的开关函数。即

$$F_{ij} = \mathrm{per}C_{ij} \quad .$$

（2）一个具有e条边和v个节点的不可分二端图G的路径矩阵P的秩是

$$R = e - v + 2 .$$

（3）任何SC函数的边开路变换仍是SC函数。

（4）任何SC函数的边短路变换仍是SC函数。

（5）任何SC函数的端点变换仍是SC函数。

（6）设具有e个变量（网络N的全部变量）的函数F是一个已知SC网络N的某两个给定端点的SC函数，而具有e'个变量的$F_e(x_k)$是F对x_k的端点变换。当且仅当$e' = e$时，N是不可分的。

（7）一个矩阵M若是路径矩阵，它一定满足奇环和条件。

（8）一个（0，1）矩阵是割集回路矩阵$\Longleftrightarrow$该矩阵不包含

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的矩阵L或L^T作为子阵，也不包含Kuratowski图的割集（回路）矩阵作为子阵。

（9）一个SP函数的非冗余奇环和或是这个SP函数的一项，或是0-路径。

（10）一个SP网络的SP函数的变量数等于网络的边数$\Longleftrightarrow$该SP网络是是最小化的。这里把变量的补看作单独的变量。

3．方法

（1）边开路变换子程序：

```
C   EDGE  OPENING  TRANSFORMATION
          SUBROUTINE  EO  (NI, NJ, IA, NC)
          DIMENSION  IA (NI, NJ)
          DO10J = 1 , NJ
          DO20I = 1 , NI
          IF(IA(I, J). EQ. NC)GO TO 30
       20 CONTINUE
          GO TO 10
       30 DO 40 I = 1 , NI
```

```
40  IA (I, J) = 0
10  CONTINUE
    RETURN
    END
```

（2）边短路变换子程序：

```
C   EDGE  SHORTING  TRANSFORMATION
    SUBROUTINE  ES (NI, NJ, NK, IA, JR, MA, LA, NC)
    DIMENSION  IA (NI, NJ), JR(NI, NK), MA(NI), LA(NI)
    DO 10 J = 1, NJ
    DO 20 I = 1, NI
    IF(IA(I, J).NE.NC)  GO  TO  20
    MM = NI - 1
    DO  30  K = 1, MM
30  IA (K, J) = IA(K + 1, J)
    IA(NI, J) = 0
20  CONTINUE
10  CONTINUE
    CALL  RE (NI, NJ, NK, IA, JR, MA, LA,
    RETURN
    END.
```

（3）端点变换程序框图：（见P198）

（4）SC网络综合步骤：

①作出与F相应的P矩阵。它的列对应于F的变量，行对应F的各项。

②添加一列1到P矩阵上，形成回路矩阵$\mathbf{B}_p$。这一列对应的变量为x_{0n}。

③用初等变换化回路矩阵$\mathbf{B}_p$为基本回路矩阵$\mathbf{B}_f$，把它写成标准形式。

④形成基本割集矩阵$\mathbf{Q}_f$。

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{B}_{f12}^T \vdots \mathbf{U}]$$

⑤形成关联矩阵$\mathbf{A}$。

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_f.$$

这里$\mathbf{D}$是非奇异的，$\mathbf{Q}_f$右乘D相当于对$\mathbf{Q}_f$作一系列的初等变换以获得一个各列不多于两个1的矩阵$\mathbf{A}$。

⑥添加最后一行以获得各列恰好只有两个1的矩阵$\mathbf{A}_a$。

⑦作出$\mathbf{A}_a$相应的网络。去掉边x_0，x_n的两端便是这个SC网络的端点。

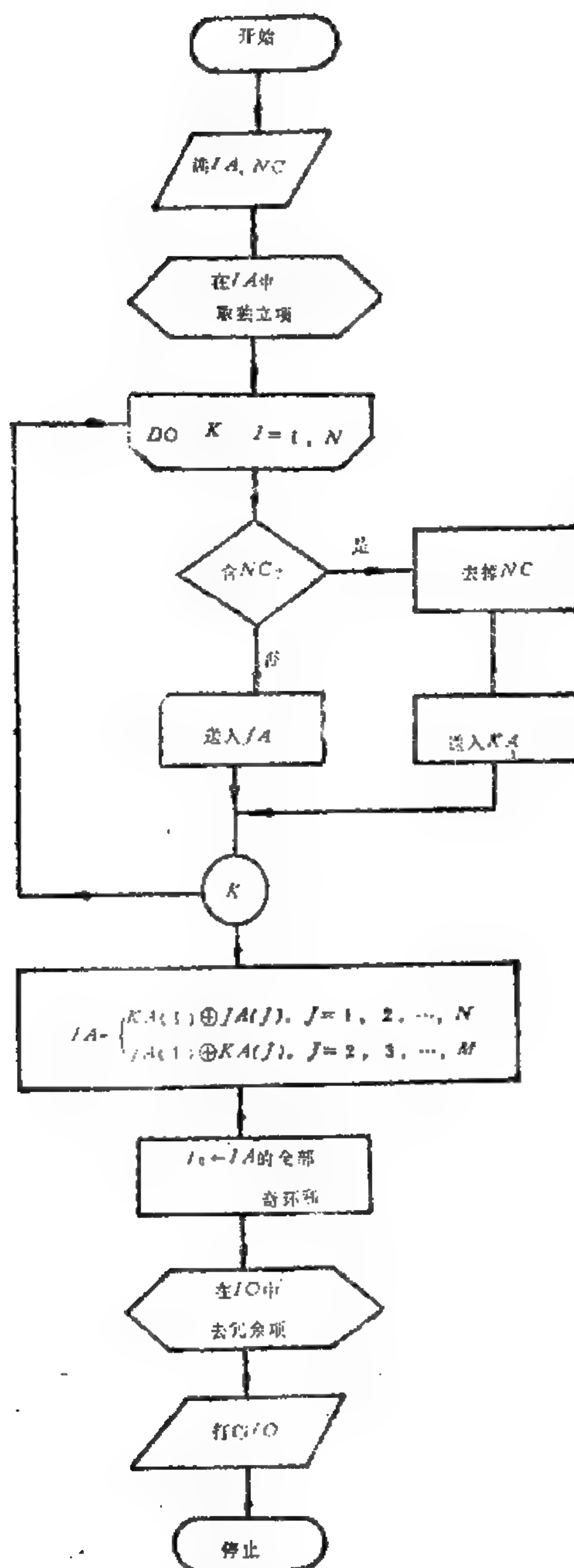
（注意：若没有说明给定的函数是SC函数，则在执行上述综合步骤前，必须验证函数是否符合奇环和条件。）

（5）最小化的SP网络解例：

例　已知开关函数

$$F_{ij} = x_1x_2x_3' + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_5 + x_1'x_6 + x_1'x_5'x_4$$

解：①先验证奇反和条件。选四个独立项作奇环和，



开始
读IA, NC
在IA中
取独立项
DO K I=1, N
含NC?
是
去掉NC
否
送入IA
送入KA
K
IA←{KA(1)⊕JA(J), J=1, 2, …, N
JA(1)⊕KA(J), J=2, 3, …, M
IO←IA的全部
奇环项
在IO中
去冗余项
打印IO
停止

(端点变换程序框图)

$$f_1 = x_1 x_3 x_5'$$

$$f_2 = x_1 x_2 x_4 x_5$$

$$f_3 = x_1 x_3 x_5$$

$$f_4 = x_1' x_3' x x_4$$

作下列运算

$$f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 = x_1 x_3 x_3' x_4$$

$$f_1 \oplus f_2 \oplus f_4 = x_1' x_5$$

$$f_1 \oplus f_3 \oplus f_4 = x_1' x_2 x_3 x_4 x_5$$

$$f_2 \oplus f_3 \oplus f_4 = x_1' x_2 x_3 x_3'$$

其中$x_1' x_5$是F_{1j}中的一项；$x_1' x_2 x_3 x_4 x_5$是$x_1' x_5$的冗余项；$x_1 x_3 x_3' x_4$和$x_1' x_2 x_3 x_3'$是0-路径。于是符合SP函数的奇环和条件。

②使用四个独立项，依照SC网络的综合方法得到

$$\mathbf{B}_\phi = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_1' & x_2 & x_3 & x_3' & x_4 & x_5 & x^0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

作初等变换得

$$\mathbf{B}_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_1' & x_4 & x_3 & x_3' & x_2 & x_5 & x_0 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

而

$$\mathbf{Q}_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_1' & x_4 & x_3 & x_3' & x_2 & x_5 & x_0 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

将第二行加到第一行上得

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_1' & x_4 & x_3 & x_3' & x_2 & x_5 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A所对应的图如下（图8.3）：

将上图去掉x_0可得下图（图8.4）：

该图即为原式所对应的SP网络。

若已知给定的函数是SP函数，可省略验证奇环和条件的步骤。显然，如上所得之SP网络的边数等于它的SP函数的变量数，故它是最小化的。

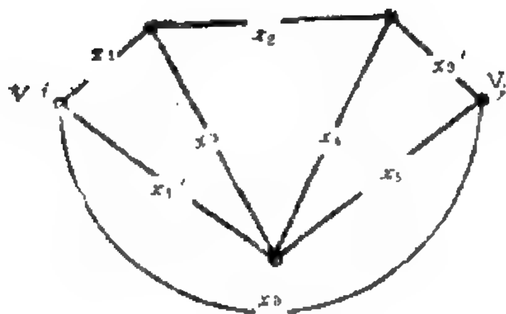


图8.3

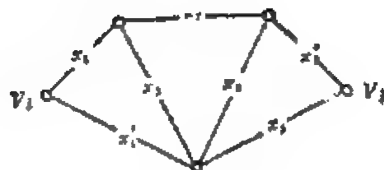


图8.4

（四）运输网络

图可作为管道网络、货物运输等运输网络的数学模型。运输网络的基本理论已在前面（一）中做了讨论，下面仅给出最小费用流的一个解例。

图8.5（a）中给出了一个加权有向图，每个边给出了两个权值，第一个是c_{ij}，括号中是d_{ij}。试求出该网络的最小费用流。

解：①网络中由源点V_0至汇点V_4的最小费用路径为{V_0，V_2，V_1，V_4}，单位流量费用和为$d_{02}+d_{21}+d_{14}=4$，取该路径中货物最大可能流通量11，边（V_2，V_1）则饱和。

②从上述最小费用路径的每一边的c_{ij}中减去11，并令$d_{21}=\infty$，如图8.5(b)所示。

③此时的网络中，最小费用路径为{V_0，V_1，V_4}，单位流量费用和为$d_{01}+d_{14}=5$。取最大可能流量3，则边（V_1，V_4）饱和。

④从路径V_0，V_1，V_4中各边的c_{ij}中减去3并令$d_{14}=\infty$，如图8.5(c)所示。

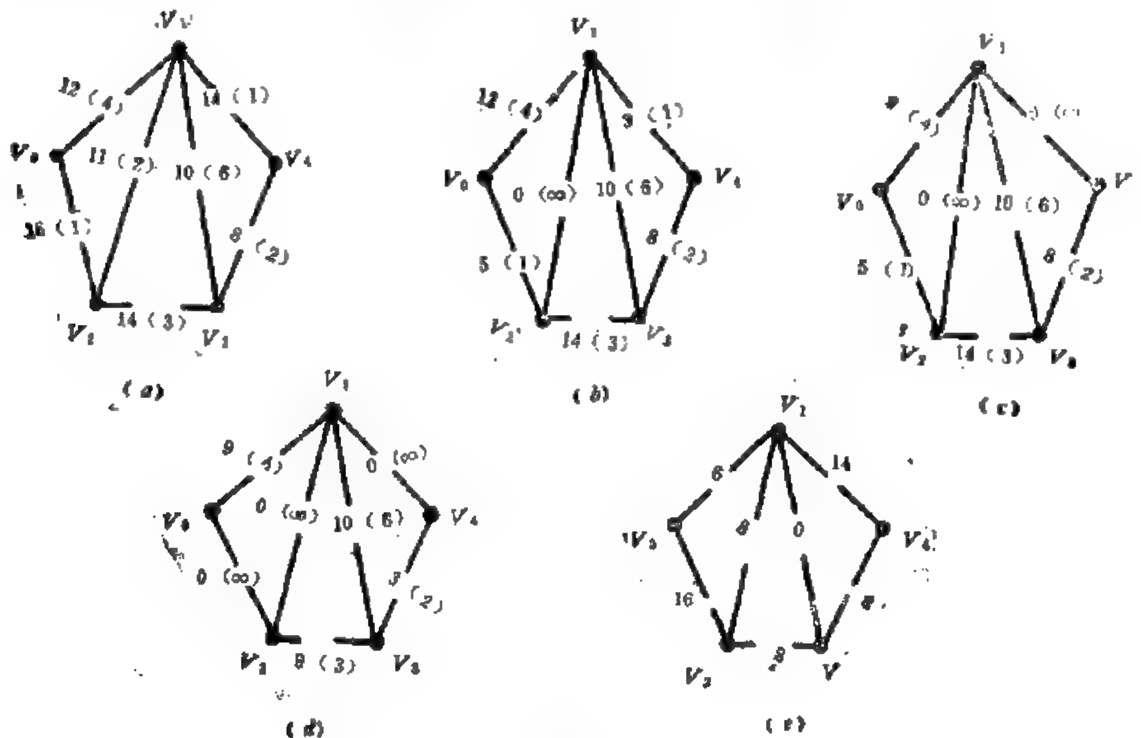


图8.5

⑤这时的最小费用路径为 V_0，V_2，V_3，V_4，单位流量费用和为$d_{02}+d_{23}+d_{34}=6$。取最大可能流量5，支路 V_0，V_2 饱和。

⑥从 V_0，V_2，V_3，V_4 各支路的c_{ij}中减去5，并令 $d_{32}=\infty$，得到图8.5(d) 的网络。

⑦这时的最小费用路径为 V_0，V_1，V_2，V_3，V_4，注意到路径方向与边（v_2，v_1）相反，尽管此时$d_{21}=\infty$，我们仍取原来值$d_{21}=2$的负值（因流向相反）。此时单位流量费用和为$d_{01}-d_{21}+d_{23}+d_{34}=7$。取最大可能流量3，边（$V_3$，$V_4$）饱和，并且得到了一个饱和割集。上述过程至此结束。

⑧此时可得到最小费用流为11＋3＋5＋3＝22，即每一条最小费用路径的最大可能流量之和。相应的最小费用为4×11＋5×3＋6×5＋7×3＝110。其中（4，5，6，7）为各最小费用路径的单位流量费用和。即$\sum_{j=1}^{n} f_{sj}=22$，$\min Z=\sum_{i,j} d_{ij} f_{ij}=110$。流的分配情况如图8.5($e$) 所示，即为网络的最小费用流。

［附］：图论还可应用于通讯网络。通过图可以研究通讯网络的结构性质、布线设计、控制方法以及阻塞的可能性等问题。应特别指出：连通度是图论用于通讯网络时的一个重要概念，另外可靠性理论与连通网络的阻塞理论是密切相关的。有关通讯网络的全部讨论，在此从略。

（五）信号流图

信号流图为求解线性系统问题提供了一个有效工具。由于方程组的代数变换与图的变换存在着对应关系，故系统中各变量的因果关系，通过流图直接显示出来；同时，由图的结构又可以直接对系统进行求解。

流图法有时提供了通过观察而获得物理系统解的规则，而不需要建立更为抽象的数学模型。而且，对于系数是用符号（字母）表示的物理参数，也能作出简便的处理。流图法也存在着一些缺点，比如对于稀疏方程的求解就不十分有效。

1．概念

（1）信号流图（Mason图）G_m：线性方程组的信号流图G_m，是一个有结合点(称为节点）的网络．节点由直线段（称为支路）连接起来．信号仅沿着图中支路上箭头标定的方向流动．信号x_k（k点的变量）沿着k点和j点（对应变量为x_j）之间的支路前进，并被乘上支路增益g_{kj}；因此，在x_j端便得到信号$g_{kj}x_k$，则流图如下图8.6所示



图8.6

可见，每一条支路，都有一个支路增益，它对应着线性方程组中两个变量之间的关系．图8.6正好描述了某一放大电路的输入、放大倍数和输出的工作情况．可见若设x_k是输入信号，是x_j输出信号，则增益g_{kj}就是该放大器的放大倍数了．

（2）输入节点（源节点）：是仅有出支路的节点；

输出节点（汇节点）：是仅有入支路的节点．

路径：是连续的单向的支路组合．

正向路径：从输入节点到输出节点的一条路径，所有节点刚好被通过一次。

闭合回路：一条闭合回路，起点和终点均是同一节点，沿此回路，所有其它节点都被通过一次。

自环：只有一个节点和一条支路的回路。

（3）路径增益：路径中各个支路增益的乘积。

回路增益：回路中的各个支路增益的乘积。

（4）流图（Coates图）G_C：一个流图G_C是由加权有向支路构成。连接在节点上的每条支路均有正方向和权（支路增益）。G_C唯一地确定了线性代数方程组。对应于n个未知数组成的n个线性方程组的流图有n个节点x_1，x_2，…，x_n对应着变量，另外添加一个源节点，如下列线性方程组：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n - b_n &= 0
\end{aligned}
$$

当$a_{kj}\neq 0$时，就有一个增益为a_{kj}的有向支路从x_j连接到x_k。若$b_k\neq 0$，就有一个增益为$-b_k$的有向支路从源节点1连接到节点x_k。

（5）子图（冷图）G_{C0}：G_C的子图G_{C0}是从G_C中去掉源节点及其所有出支路而得到的图。

（6）G_{C0}的连接：一个流图G_{C0}的连接是G_{C0}的这样一个子图，即

a）G_{C0}中的每个节点都包含在内；

b）每个节点仅有一条入支路和另一条出支路。

连接增益：是此连接中所有支路增益的乘积，用$C(G_{C0})$示之。

（7）有向回路：是一个有向支路的回路，且所有支路的方向应是相同的。

前向路径：是一个有向支路的路径，从初始点到终点的所有支路的方向均相同。

（8）单连接：G_C图中从节点p到q的一个单连接是含有G_C中所有节点的一个子图。

a）在子图中，节点p仅有一条出支路，无入支路；

b）在子图中，节点q仅有一条入支路，无出支路；

c）在子图中，所有其它节点，正好有两条支路一进一出。

单连接是前向路径与有向回路的集合。

单连接增益的定义与连接增益的定义相似。

（9）改进的Coates图G_L：G_L是一个用来表示下列方程组的有向图：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

式中变量x_j用节点（也叫做x_j）表示，x_j的系数a_{ij}用增益为a_{ij}的支路表示，a_{ij}接于x_i和x_j之间，带有从x_j至x_i的箭头；最后源节点1包含在G_L中，对于系统中的每一个常数b_k，对应于G_L中一条具有增益b_k的支路，该支路是从1至x_k。

（10）图G_{L0}：图G_{L0}是G_L的一个子图，其中除去源节点1及和它相关的支路。

（11）回路集L：回路集L是G_{L0}的子图，包含了G_{L0}中所有的节点，而每一个节点有一条入支路和一条出支路。

乘积P是L中所有支路增益之积。

(12) 图G_{LK}：G_{LK}是G_L的一个子图，其中所有从参考节点x_k流出的支路均除去，源节点1对x_k点短路。

(13) 2-回路集L_2及其乘积P_2：2-回路集L_2是G_{LK}的一个子图，包含了G_{LK}所有节点，每一个节点有一条入支路和一条出支路。L_2中所有支路的增益乘积，称为2-回路集乘积。

(14) chan-Mai图G_S：设有一线性代数方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

G_S表示此方程组的一个有向图。每一个常数b_i由常数节点b_i表示。每一个变量x_j由变量节点x_j表示。若$a_{ij} \neq 0$，则必有一具有增益a_{ij}的有向线段从节点x_j到节点b_i，G_s中的节点以下列方法排列：将所有常数节点b_1，b_2，…，b_n排在上行，所有的变量节点排在下行。因此，具有相同下标的节点由垂直支路连接。

(15) 图G_{Sj}：图S_{Sj}是从图G_S获得的，移去节点x_j的所有出支路，然后加进一条入支路，此支路具有增益b_i（若$b_i \neq 0$），方向从节点x_j到节点b_i。（$i = 1$，2，…，n）

(16) 分离S：一个给定的图（G_S或G_{Sj}）的分离S是一个子图，满足下面三个要求：

a）包含图（G_S或G_{Sj}）的所有节点；

b）每个变量节点x_j，正好有一条流出的支路；

c）每个常数节点b_i恰好有一个流入的支路分离中的竖直支路和非竖直支路。如图8.7所示。

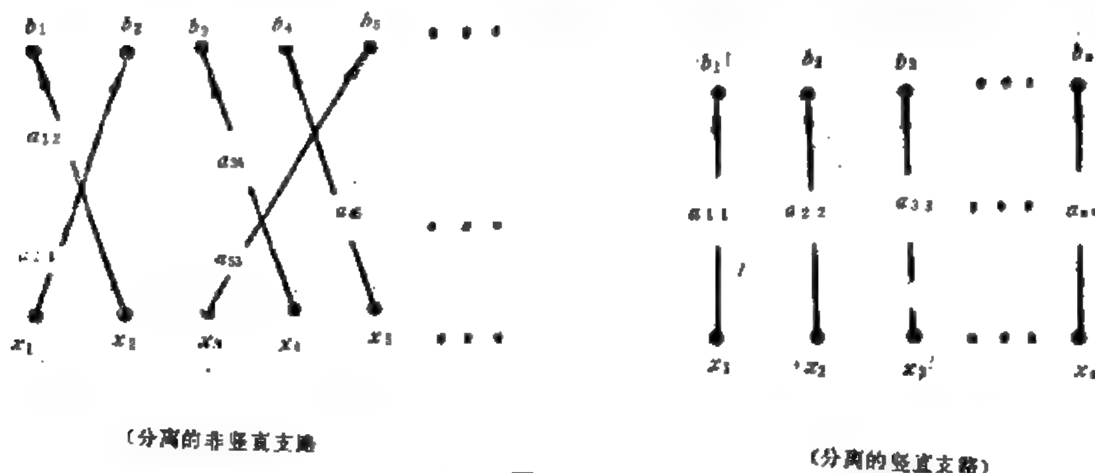


图8.7

(17) 分离积S_P：分离积S_P是分离S中所有支路的乘积，G_S的分离积由$S_P(G_S)$表示之。G_{Sj}的分离积，则由$S_P(G_{Sj})$表示。

(18) 对称对：对称对是分离S中的一对支路，一条是从节点x_i到节点b_j，另一条是从节点x_j到节点b_i（$i \neq j$）。

(19) 非对称支路：它是分离S中非竖直的支路，不属于S中的任何对称对。

(20) k阶回路集合：一个第k阶回路集合是k个不相接触回路的集合。集合内的各个回路是k阶回路。

(21) Mason图G_m的回路矩阵L_l：Mason流图G_m的回路矩阵L_l，具有e列（每一列对应G_m的一个边），它的行将对应于G_m的各个回路。若第j条边在第i个回路内，则L_l中的

（i，j）元素是1，反之为0。

（22）k阶回路矩阵的L_k：k阶回路矩阵L_k，具有e列（每一列对应于G_n中的一个边），它的行对应于G_n的k阶回路集。若第j条边在第i个回路集内，则L_k中的（i，j）元素是1，反之为0。

（23）k个回路邻接矩阵：k个回路邻接矩阵$\mathscr{L}_k$，各个行对应于G_n的k阶回路集，各个列对应于G_n的一阶回路。当第j个一阶回路和第i个k阶回路集不接触，则（i，j）元素为1，反之为0。

2. 定理

（1）设T_k是从源节点到汇节点的第k条正向路径的增益⟹流图的增益T

$$T=\frac{1}{\Delta'}\sum_k T_k\Delta_k,$$

式中

$$\Delta'=1-\sum_m P_{m1}+\sum_m P_{m2}-\sum_m P_{m3}+\cdots+(-1)^j\sum_m P_{mj},$$

P_{m1}为第m个回路增益（沿回路各支路增益乘积，或叫做一阶回路增益）；

P_{m2}为第m组两个不相接触回路（叫做二阶回路）增益乘积；

P_{mj}为第m组j个不相接触回路（叫做j阶回路）增益乘积。

Δ_k为除去第k条路径及与它（第k条路径）相接触的所有回路后所得子图的Δ值

T_k为第k条正向路径的支路增益的乘积。

（2）方程组

$$x_j=\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}b_k}{\Delta}$$

中行列式Δ，可以根据其流图G_C的子图G_{C0}公式求得，即

$$\Delta=(-1)^n\sum_p(-1)^{L_p}C(G_{C0})_p.$$

式中L_p是第p组连接的有向回路数；$C(G_{C0})_p$是G_{C0}的第p组连接的连接增益；$\sum_p$是对G_{C0}中所有的连接求和。

（3）方程组

$$x=\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}b_k}{\Delta}$$

中的$\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}b_k$是可从方程组

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}}_{B}$$

的流图G_C由下列公式计算：

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}b_k=(-1)^n\sum_{\tau}(-1)^{L\tau}C(G_c;\ 1\to x_j)\tau.$$

式中$C(G_c;\ 1\to x_j)$是G_c中从节点1到节点x_j的第τ个单连接的单连接增益。L_τ是第τ个单连接中的有向回路数，对τ的求和是对G_c中所有的单连接进行的。

（4）具有n个未知数的线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

中，

$$x_j=\frac{\sum_{\tau}(-1)^{L\tau}C(G_c;\ 1\to x_j)_\tau}{\sum_{\rho}(-1)^{L\rho}C(G_{c_0})_\rho}.$$

式中

$C(G_c;\ 1\to x_j)\tau$是G_c的从1到x_j的第τ个单连接的增益；

L_τ是第τ个单连接中的有向回路数；

$C(G_{c_0})_\rho$是第ρ个连接的连接增益；

L_ρ是第ρ个连接的有向回路数。

上式是对G_c（在τ上）的所有单连接和G_{c_0}（在ρ上）的所有连接求和。

（5）在具有n个未知数的n个线性方程组中

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

变量x_j可由下式给出：

$$x_j=\frac{\sum_{全部P_2}(-1)^{N_{L2}}P_2}{\sum_{全部P}(-1)^{N_L}P}$$

式中，

N_{L_2}是2-回路集L_2中的回路数；

N_L是回路集中的回路数，

（6）图G_{L1}的回路集数等于Δ_1，这里

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{n}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{nj_n}.$$

Δ_1是这样得来的：用1代换Δ中每一个非零元素，且代换后的行列式的展开中，每一项的符号均定为+1。

（7）在具有n个未知数的n个联立的独立代数方程组中，

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ )$$

变量x_j的值可由下式给定：

$$x_j = \frac{\sum_{\tau}(\mathrm{sign}S_{p\tau})S_{p\tau}(G_{Sj})}{\sum_{\rho}(\mathrm{sign}S_{p\rho})S_{p\rho}(G_S)},$$

式中，

$$\mathrm{sign}S_{pk} = \begin{cases} (-1)^{n_{sk}-n_{ek}-1} & n_{ek} \neq 0, \quad k = \tau\text{或}\rho) \\ (-1)^{n_{sk}} & (n_{ek} = 0) \end{cases}$$

$n_{s\tau}$是G_{sj}中第τ个分离中的“对称对”的数目；

$n_{e\tau}$是G_{sj}中第τ个分离中的不对称的支路数；

$S_{p\tau}(G_{sj}$是G_{sj}中第τ个分离积；

$n_{e\rho}$是G_s中第ρ个分离中不对称支路数；

$n_{s\rho}$是G_s中第ρ个S中的对称对数；

$S_{p\rho}(G_S)$是G_S中第ρ个S的分离积.

分离积$S_{p\rho}(G_S)$和$S_{p\tau}(G_{Sj})$的求和，是分别对所有的G_S或G_{Sj}进行的.

（8）一个Mason图G_m转化为等效的Coates图G_L，可按下列步骤进行：

①从每一个自环增益减去1.

②对没有自环的每个节点加进增益为－1的自环.

③用$-b_k$去乘第k个源节点b_k的支路增益（$k=1$，2，…，S；其中S是源节点的数目），然后将所有S源节点结合成为一个源节点（由1表示）.

（9）一个改进的Coates图G_L转化为Mason图G_m，可按下列步骤进行：

①对每一个自环的增益加1.

②除去源节点1以外，对每个没有自环的节点，加进具有增益为1的自环.

③将源节点分成S个源节点，使S个新源节点分别为b_1、b_2、…b_S，再分别用$-\frac{1}{b_1}$，$-\frac{1}{b_2}$，…，$-\frac{1}{b_S}$乘S条对应支路的增益；因此，这些支路的新增益都为＋1，保证支路不改变方向.

（10）具有e条边和v个顶点的连通Mason流图G_m，回路和路径集合对应的从顶点i到j的增益$G_{i\to j}$，可以应用下列步骤获得：

①由G_m的j到i加一条边e'，得到G_m'.

②写出G_m'的$\mathbf{A}_m$和$\mathbf{B}_{mf}$.

③应用下述步骤从$\mathbf{B}_{mf}$求$\mathbf{L}_1$：

i）对$\mathbf{B}_{mf}$的行，求所有可能的行和，使各行只能出现同一符号的1（正或负，不允许有正有负）或0，设这是一个新矩阵$\mathbf{L}_1'$；

ii）移去矩阵中元素前的符号，得到$\mathbf{L}_1''$；

iii）移去冗余和边不相接的行，便得$\mathbf{L}_1$.

④应用布尔算法，求得$\xi=\mathbf{A}_m^T\mathbf{A}_m\mathbf{L}_1^T$.

⑤用$k=1$，计算

$$\mathscr{L}_k = \mathbf{L}_k\xi = [L_{ij}]$$

当$L_{ij}=0$，使$\mathbf{L}_k$的第i行和$\mathbf{L}_1$的第j行相加，同时设这个和是新矩阵$\mathbf{L}'_{k+1}$的一行；如是欲

完，最后移去所有新矩阵L'_{i+1}的冗余行，剩下的则是L_{i+1}，继续运算，直至從$\mathscr{L}_n$（$n=1,2,\cdots$）矩阵不包含0为止。

⑥记录L_1，L_2，…，L_n，对于各个矩阵的各行，检查表示e'的这一列．若元素为1，则在对应这一行中的其它数值为1的元素表示对应于G_n的Mason增益公式的分子项（路径和回路集合）．若元素为0，则在对应这一行中数值为1的元素表示对应于G_n的Mason增益公式的分母项（回路集合）．如此逐项检查，则提供了所有的分子和分母。

［附］图的四种简化规則（如下图表8.8）：

运算种类	原始图	简化图
合并串联支路	1 2 3 n n+1; a_1 a_2 … a_n	1 n+1; $a_1 a_2 \cdots a_n$
合并并联支路	1 2; a_1 a_2 a_n	1 2; $a_1+a_2+\cdots+a_n$
消去节点	1 2 3 4 5; a_1 a_2 a_3 a_4 a_5	1 2 3 4; a_1a_4 a_1a_5 a_2a_4 a_2a_5 a_3a_4 a_3a_5
消去自环	1 2 3 4 6; a_1 a_2 a_3 a_4 a_5	1 2 3 4 5; $a_1/(1-a_5)$ a_3 $a_4/(1-a_5)$

图8.8

3．方法

（1）Mason图求法：

从一个线性系统的代数方程组获得Mason图，可根据以下步骤进行：

①设某线性系统对应的代数方程组为

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\
&\cdots\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n
\end{aligned}
$$

式中b_1，…b_n表示源节点；x_1，…，x_n表示汇节点。

将上述方程组改写为

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}b_1-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3-\cdots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$x_2=\frac{1}{a_{22}}b_2-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1-\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3-\cdots-\frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n$$

……………………………………………………

$$x_n=\frac{1}{a_{nn}}b_n-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2-\cdots-\frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}$$

②流图中源节点数等于非零的 b 的数，即每一个源节点对应一个非零b_j。

③每一个汇节点，联系着一个非独立的变量x_1，x_2，…，x_n。

④每一个节点所表示的变量之值，等于所有输入信号之和。

⑤每一个节点所表示的变量之值，传输到所有离开该节点之支路。

（2）用Mason公式求线性方程组之解。

例。设线性方程组为

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{22}x_2+a_{23}x_3=0$$
$$a_{31}x_1+a_{33}x_3=b_3$$

试求x_2。

解：原方程组化为

$$x_1=\frac{b_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$$

$$x_2=-\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3$$

$$x_3=\frac{b_3}{a_{33}}-\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1$$

画出信号流图G_s（见图8.9）。

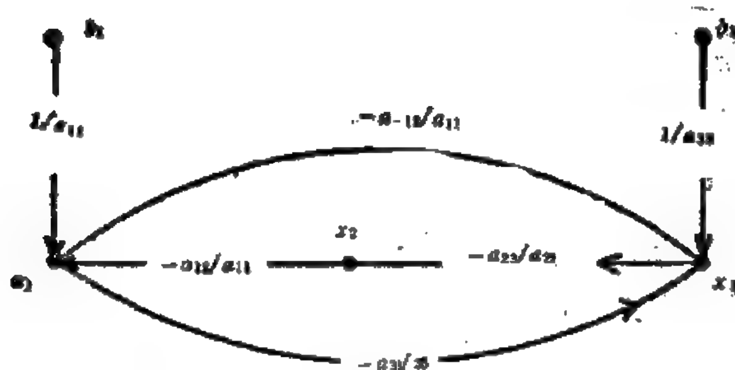


图8.9

可得

$$\Sigma P_{m1}=\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)\left(-\frac{a_{31}}{a_{33}}\right)+\left(-\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\left(-\frac{a_{31}}{a_{33}}\right)$$

$$=\frac{a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{23}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}}$$

$$\Delta'=1-\frac{a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{23}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}}$$

由b_1到x_2的正向路径，其增益为

$$T_1=\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\left(-\frac{a_{31}}{a_{33}}\right)\left(-\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)=\frac{a_{23}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}}$$

同时，由于与第 k 条路径相接触的回路除去后没有子图，即

$$\Delta_1=1-0=1$$

由b_3到x_2的正向路径，其增益为

$$T_3=\left(\frac{1}{a_{33}}\right)\left(-\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)=-\frac{a_{23}}{a_{22}a_{33}}$$

同理

$$\Delta_3=1-0=1。$$

于是，对于源节点b_1，则有

$$(x_2)_{b1} = \frac{1}{\Delta'} T_1 \Delta_1 b_1$$

对于源节点b_3，则有

$$(x_2)_{b3} = \frac{1}{\Delta'} T_3 \Delta_3 b_3.$$

由迭加原理，x_2最后表作

$$x_2 = (x_2)_{b1} + (x_2)_{b3} = \frac{a_{23}a_{31}b_1 - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31}}.$$

（3）用Coates图求线性方程组之解。

例。设线性方程组为

$$a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{33}x_3 = b_3$$

试求x_2

解：其对应的Coates图G_c和G_{c0}如图8.10所示；

于是，G_{c0}中所有的连接如图8.11所示；

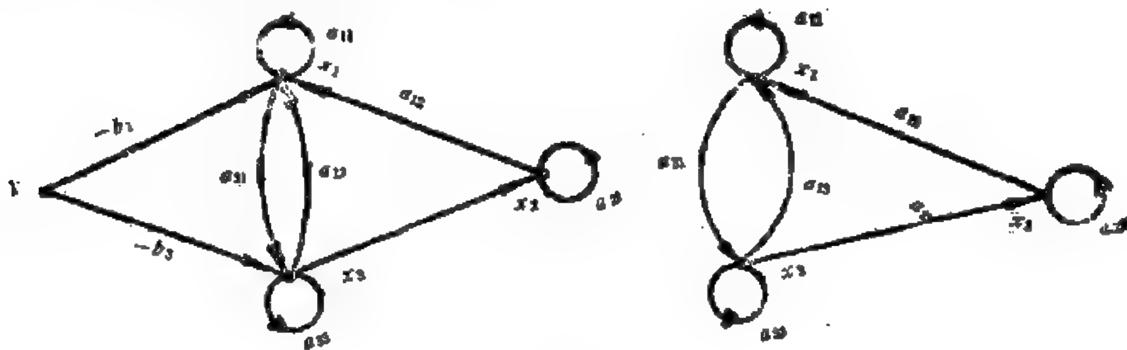


图8.10

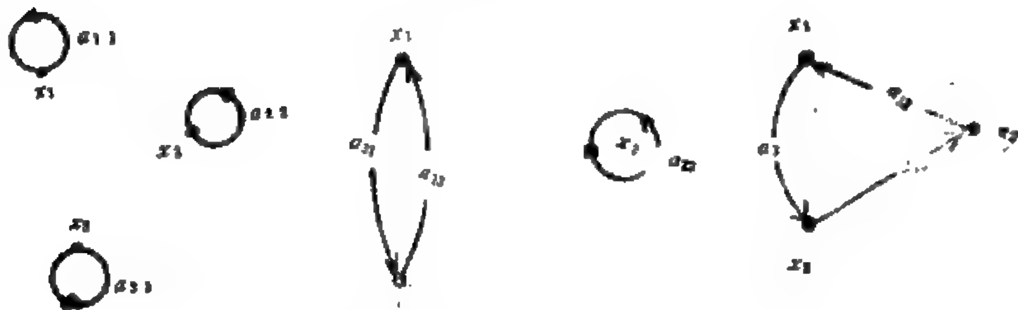


图8.11

G_c中所有从节点1到x_2的单连接如图8.12所示；

由Coates流图的增益公式，设 $j = 2$，则得

$$x_2 = \frac{(-1)^0(-b_1)(a_{31}a_{23}) + (-1)^1(-b_3)(a_{23}a_{11})}{-a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22} - a_{12}a_{31}a_{23}}$$

$$= \frac{a_{23}a_{31}b_1 - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31}}.$$

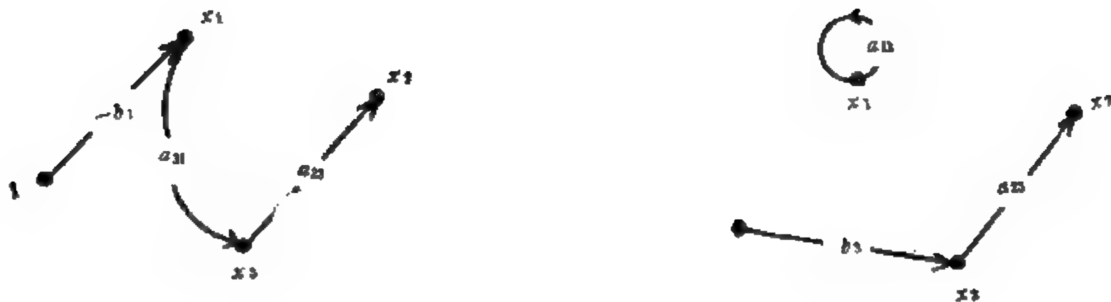


图8.12

（4）根据chan和Bapna改进的Coates图求线性方程组之解。

例　同前线性方程组，求x_2。

解：G_L图（如图8.13）：

G_{L0}图（图8.14）：

G_{L0}的所有回路集如图8.15所示：

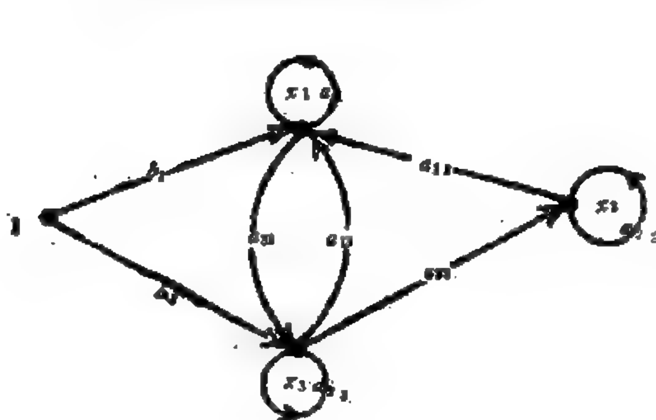


图8.13

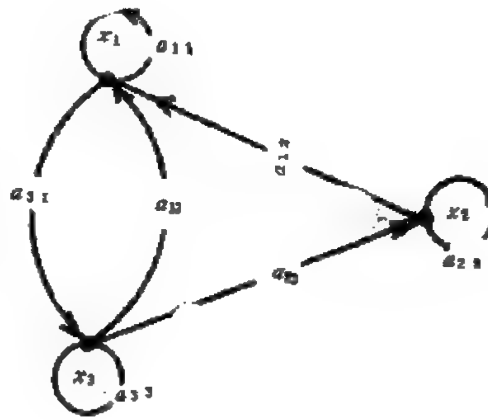


图8.14

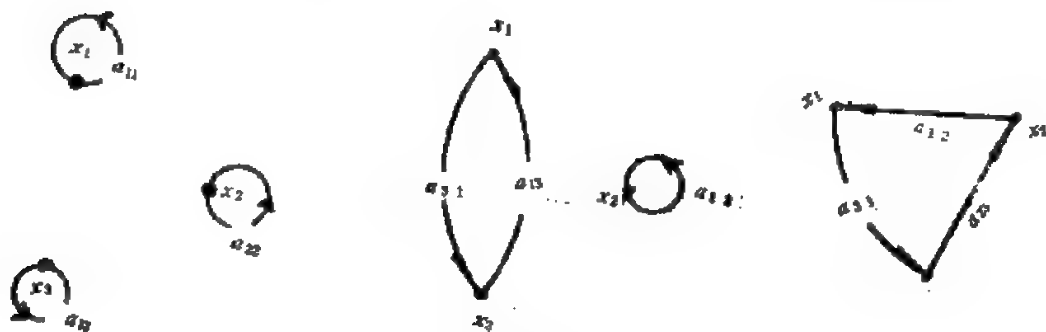


图8.15

对于x_2的图G_{L2}，如图8.16所示：

G_{L2}的所有2-回路集，如图8.17所示：

于是可得

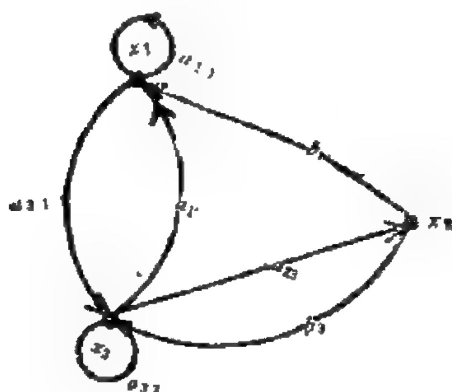


图8.1

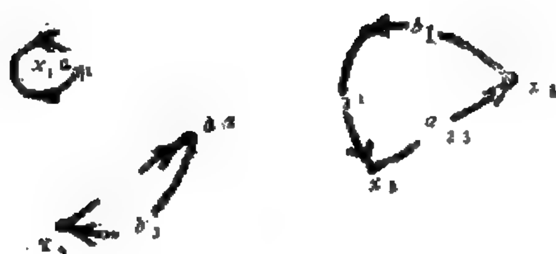


图8.17

$$x_2=\frac{(-1)^2a_{11}a_{23}b_3+(-1)^3a_{31}a_{23}b_1}{(-1)^3a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2a_{13}a_{31}a_{22}+(-1)^1a_{12}a_{31}a_{23}}$$

$$=\frac{a_{23}a_{31}b_1-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}+a_{12}a_{23}a_{31}}.$$

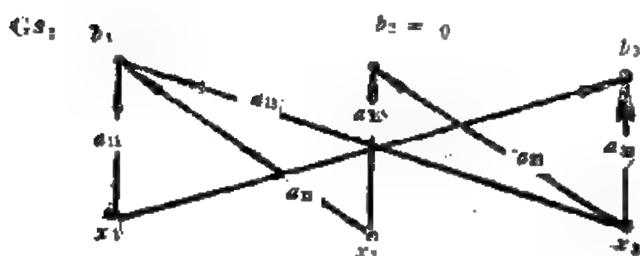


图8.18

（5）用Chan-Mai图求线性方程组之解。

例 同前线性方程组，求x_2。

G_S的所有分离图（如图8.19所示）。

现在再从G_S中的x_2点，移去其所有出支路，然后加进两条支路b_1和b_3，分别从$x_2\to b_1$，$x_2\to b_3$，于是形成图G_{S2}，如图8.20所示；

G_{S2}的所有分离集，如图8.21所示；

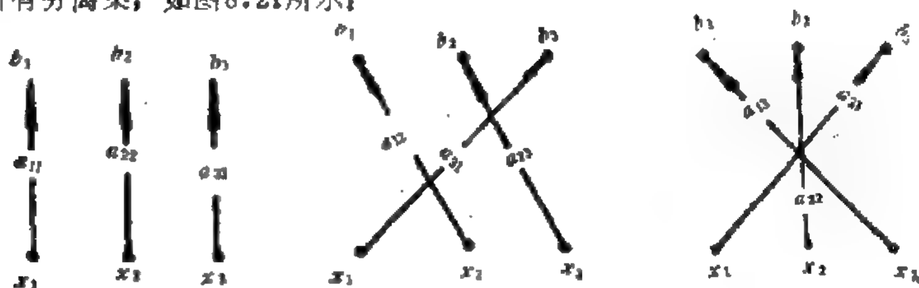
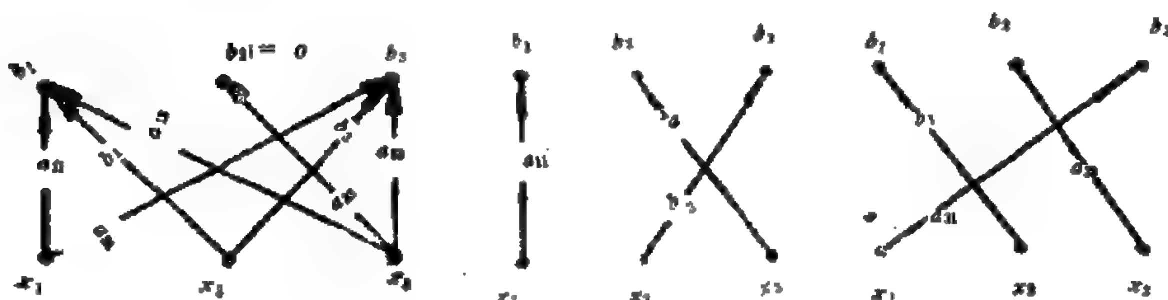


图8.19



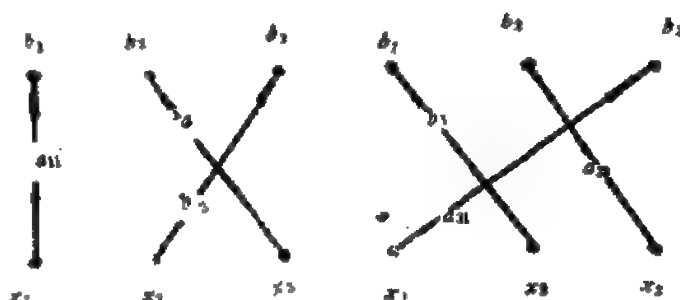


图8.20

图8.21

据定理可得

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{(-1)^{1+1-1}a_{12}a_{33}b_3 + (-1)^{0+2-1}a_{33}a_{31}b_1}{(-)^{6+2-1}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{0+8-1}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{3+1-1}a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$= \frac{a_{32}a_{21}b_1 - a_{11}a_{32}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

（6）直接从线性网络获得流图的方法之一——回路分析法。

（A）G_S图的获得：从一个给定的线性网络N获得流图G_S，有下列步骤：

①设定该网络中各回路电流的参考方向（因为顺时针或逆时针），以I_1、I_2、…I_n（n是网络N中独立回路的总数）表示之。

②将常量节点b_1、b_2、…、b_n放在上行，变量节点I_1、I_2、…、I_n置于下行，I_j与b_j垂直对齐。

③从节点I_j到节点b_j放置有向支路，其支路增益为第j个回路的阻抗和。

④在网络中对于每个位于回路之和回路j之间的支路，在G_S中都有一个对称对位于节点i与j之间，对称对中每条支路对应的增益为回路i、j之间的公共阻抗的负值。

出此可得到G_S图。

（B）G_{Sj}图的获得：从一个给定的线性网络N出发，用改进的G_S图获得G_{Sj}图，有下列步骤：

①除去G_S中所有I_j的出支路。

②若有一个电压源在网络N的回路i中（$i=1$，2，…，n），则在G_{Sj}中将有一个有向支路从节点I_i到b_i，支路增益等于沿i回路所有电压源的代数和（正（负）号是由沿回路电流的方向上电压源方向与之相同还是相反而定）。

（7）直接从线性网络获得流图的方法之二——节点分析法。

（A）G_S图的获得，从一个给定的线性网络N获得流图G_S，有下列步骤：

①在网络中选一参考节点，连同其它节点标以V_1、V_2、…、V_n，节点的总数为$n+1$。

②把常量节点b_1、b_2、…、b_n放在上面的一行，变量V_1、V_2、…、V_n置于下面的一行，且b_j和V_j竖直相对（$j=1$，2，…，n）。

③从节点V_j到节点b_j，置一有向支路，有向支路增益等于V_j的所有导纳之和。

④在网络中，V_i和V_j（$i \neq j$）节点间连通的各个支路，必有一付对称对存在于G_S的节点V_i和V_j之间，其支路增益等于网络N中连接于V_i和V_j间的导纳总和之负值。

（B）G_{Sj}图的获得：从一个给定的线性网络N出发，用改进的G_S图获得G_{Sj}图，有下列步骤：

①消去G_S中在V_j节点上所有出支路。

②若有电流源连接到网络N中的节点i（$i=1$，2，…，n），则在G_{Sj}中从V_i到b_i有一条有向支路，其支路增益等于连接到网络N中的节点V_i所有电流源之和（正（负）号系由电流源是进入（离开）节点V_i而定）。

（8）线性系统的流图分析。

例　设有一简单的宇宙飞行器控制系统，框图如图8.22所示，试求转移函数C/R。

解：其对应的信号流图如下图（图8.23）所示：

①添加e'，图8.23变成图8.24所示的G_s'。

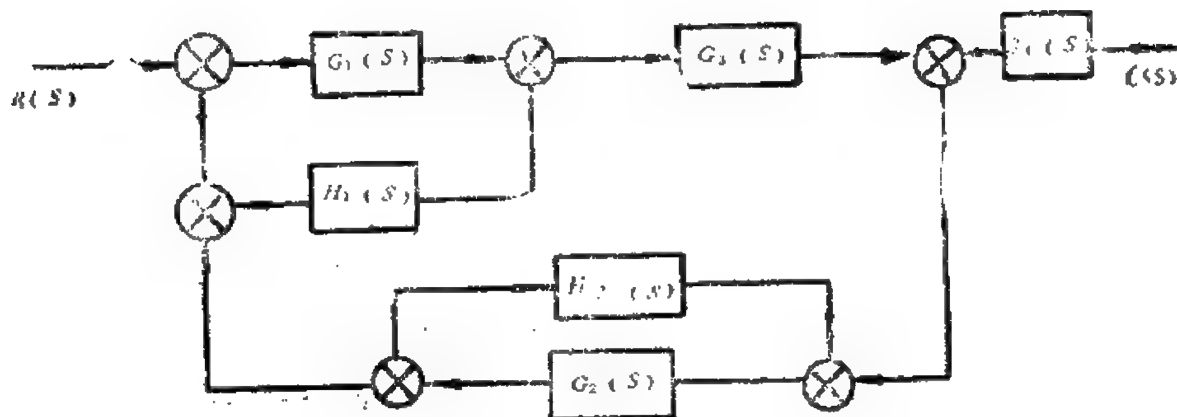


图8.22

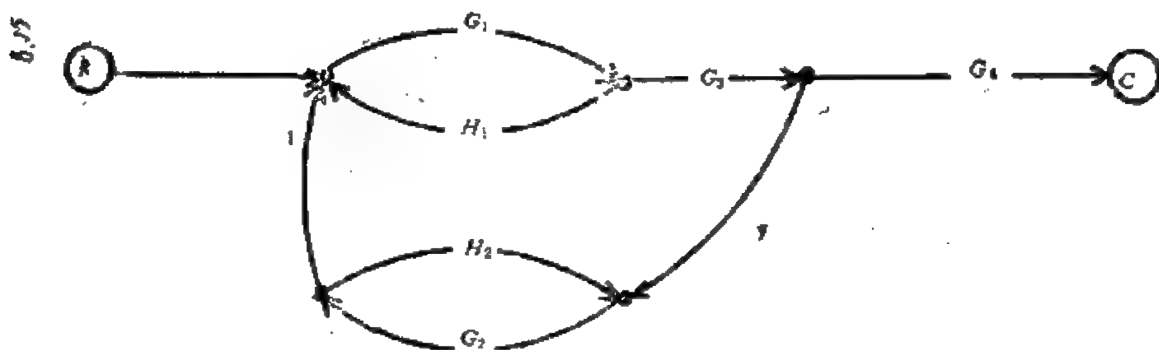
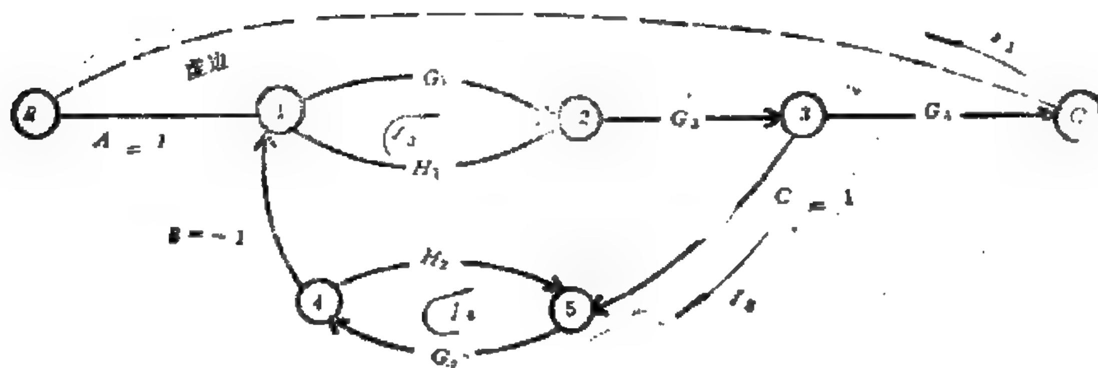


图8.23



42.8图

②构成A_a和B_{af}。

$$
\mathbf{A}_x=\begin{array}{c}
\begin{matrix} A & B & C & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & -H_1 & -H_2 & e' \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{B}_{xf}=\begin{array}{c}
\begin{matrix} A & B & C & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & -H_1 & -H_2 & e' \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0\\
0 & +1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0\\
+1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

③构成$\mathbf{L}_1$。

$$
\mathbf{L}_1=\begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{matrix}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} A & B & c & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & -H_1 & -H_2 & e' \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

④构成ξ。

$$
\xi=\mathbf{A}_x^T\mathbf{A}_x\mathbf{L}_1^T=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

⑤令 $k=1$，求得$\mathscr{L}_1$和$\mathbf{L}_2$

$$
\mathscr{L}_1=\mathbf{L}_1\xi=\begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4 \end{matrix}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{L}_2=\begin{matrix} L_1'=L_1+L_4\\ L_2'=L_3+L_4 \end{matrix}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} A & B & C & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & -H_1 & -H_2 & e' \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\mathscr{L}_2 = L_1\xi = \begin{array}{c} \\ L_1' \\ L_2' \end{array}\begin{array}{cccc} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

⑥因$\mathscr{L}_2$不含 0 ，处理终止。检查L_1和L_2，求得转移函数为

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_3G_4 + G_1G_2G_3G_4H_2}{1 + G_1G_2G_3 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1H_2}$$

上述算法，已被编写为计算机程序。

（六）色数问题应用简例

例 图8.25是一个电路图，要设计一印刷电路板。由于印刷电路板是在绝缘板内嵌入导线，故在同一板内不允许两根导线在接点以外的地方交叉，问该图最少要分成几层印刷电路板。

解：图8.25的边e_1、e_2、…、e_9分别对应于顶点v_1、v_2、…、v_9，当e_i、e_j两边在接点以

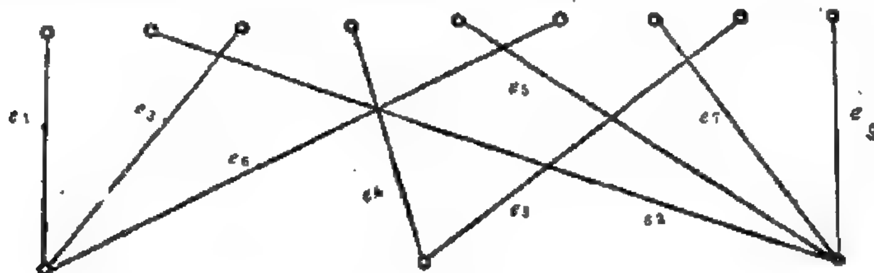


图8.25

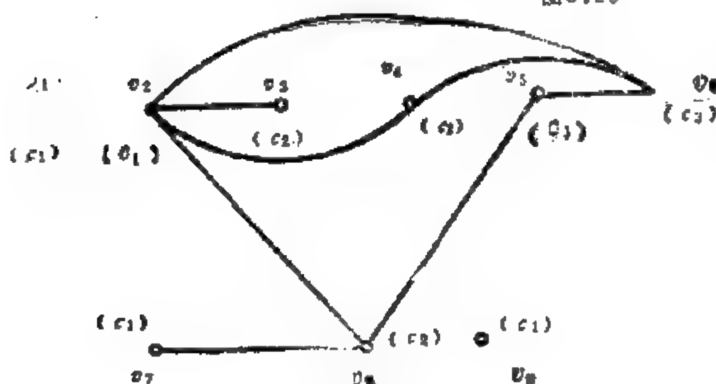


图8.26

外交叉时，则过v_i、v_j引一条边。例如e_2和e_3、e_4、e_6、e_8诸边在接点以外交叉，故从v_2到v_3、v_4、v_6、v_8分别引边，如此等等，于是得到图8.26。

该图的色数为 3 ，如图8.26所示，可见C_1、C_2、C_3三种颜色对其顶点进行着色。

由于v_1、v_2、v_5、v_7、v_9着同一色C_1；而v_3、v_4、v_8同着以C_2色；v_6点着C_3色。故e_1、e_2、e_5、e_7、e_9在同一层印刷电路板上，如图8.27(a) 所示；而e_3、e_4、e_8在另一层印刷电路板上，如图8.27(b) 所示；e_6在第三层印刷电路板上，如图8.27(c) 所示。

三层印刷电路板组成图8.25所示的电路，其构成形如下（图8.28）：

（七）服务点设置问题简例

服务点设置问题，是一个应用很广的图论中的极值问题。

服务点设置问题的一般提法可：设$G=(V, E,)$是一个连通的无向图，在它的各个顶

点v_i上，有一些服务对象（例如病人），现在要设置一个服务点（例如卫生院），问服务点设在G的哪一个顶点上最好？

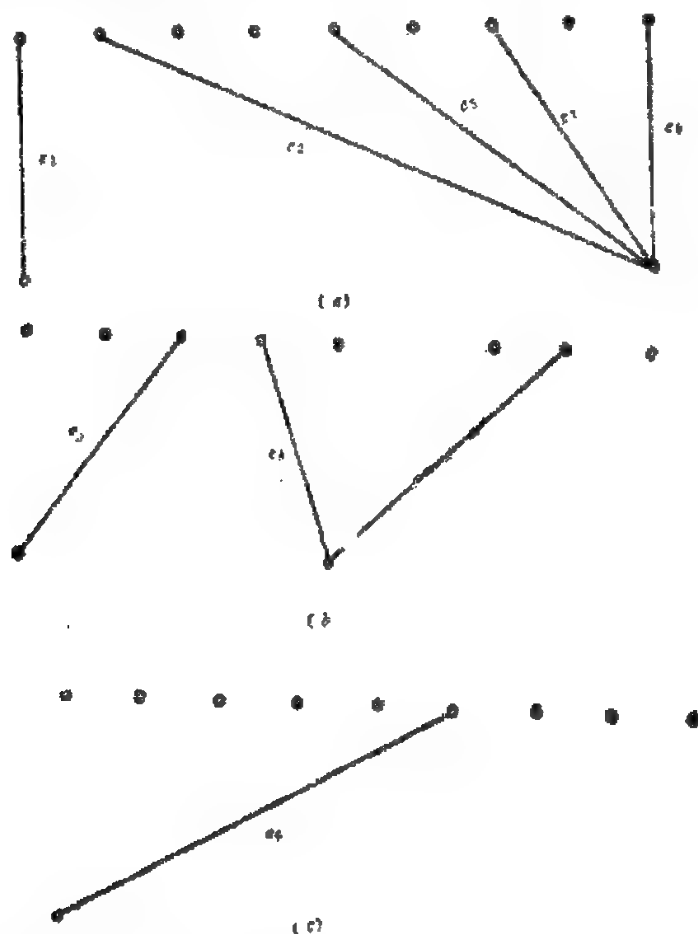


图8.27

根据好坏标准之不同，讨论以下两种情况。

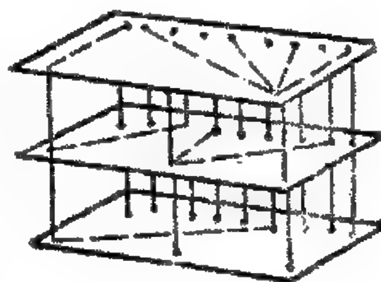


图8.28

1．第一种标准：使最大服务距离达到最小。

（1）设$G=(V, E)$是一个连通的无向图，每一条边e_j有一个非负的长度$L(e_j)$。现在任取一个顶点v_i，然后考虑v_i与G的所有顶点之间的距离：

$$d(v_i, v_1), d(v_i, v_2), \cdots, d(v_i, v_n).$$

我们称这n个距离中的最大数为顶点v_i的最大服务距离，记作$e(v_i)$。

使$e(v_i)$达到最小的顶点叫做图G的中心。

（2）求G的中心的步骤：

①作出图G的距离表。

②求出每一个顶点v_i的最大服务距离$e(v_i)$，$e(v_i)$等于距离表上与v_i对应的行中的最大数。

③求出使$e(v_i)$达到最小的顶点v_K，v_K即为图G的中心。

结论：若以最大服务距离的大小作为好坏的标准，则服务点以设在中心为最佳。

（3）例：图8.29的图G中，有7个顶点．试判断服务点设在何处最好．

图8.29

解：①列出图G的距离表（见下）。

②最大服务距离在表中的最后一列标出。

③G的中心（即服务点）为v_3。

2．第二种标准：使运输量达到最小。

（1）设有一个连通图$G=(V,\ E)$，G的每一条边e_j有非负的长度$L(e_j)$，G的每一个顶点v_i还有一个"产量"$a(v_i)$。对于每一个顶点v_i，令

$$g(v_i)=a(v_1)\cdot d(v_i,\ v_1)+a(v_2)\cdot d(v_i,\ v_2)+\cdots+a(v_n)\cdot d(v_i,\ v_n)。$$

$g(v_i)$代表把各个点的物资运到v_i所花费的吨公里。

图G距离表

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$e(v_i)$
v_1	0	3	5	6.3	9.3	4.5	6	9.3
v_2	3	0	2	3.3	6.3	1.5	3	6.3
v_3	5	2	0	2	5	2.5	4	5
v_4	6.3	3.3	2	0	3	1.8	3.3	6.3
v_5	9.3	6.3	5	3	0	4.8	6.3	9.3
v_6	4.5	1.5	2.5	1.8	4.8	0	1.5	4.8
v_7	6	3	4	3.3	6.3	1.5	0	6.3

使$g(v_i)$最小的顶点叫做图G的中央点。

（2）求中央点的步骤：

①作出图G的扩展的距离表（在距离表的基础上，下加一行产量，最右列改$e(v_i)$为$g(v_i)$）。

③通过比较，得出使$g(v_i)$为最小的顶点，该点即为中央点．

图8.30

结论：若以运输量的大小作为好坏的标准，则服务点以设在中央点为最佳。

（3）例　设图8.30表示一个矿区，它有7个矿分别在v_1、v_2、v_3、v_4、v_5、v_6、v_7．这7个矿每天的矿石产量分别为3千吨、2千吨、7千吨、1千吨、5千吨、1千吨、4千吨．现在要从v_1、v_2、…、v_7中选一个地点来造选矿厂，问应设在何处才使各矿生产出的矿石往选矿厂运时花费的运输力量最小？

解：①列出扩展的距离表：（见P.218）。

②经比较，v_3点为中央点，即选矿厂设在v_3处最佳．

[附] 若设置p个服务点，就导致p-中心问题. 可以想象，p-中心问题有很广的用途，但仍沿用前述的算法来解决，就不是一个有效的方法了，其计算复杂性是指数型的. 因

扩展距离表

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$g(v)$ (千吨公里)
v_1	0	3	5	6.3	9.3	4.5	6	122.3
v_2	3	0	2	3.3	6.3	1.5	3	68.3
v_3	5	2	0	2	5	2.5	4	64.5
v_4	6.3	3.3	2	0	3	1.8	3.3	69.5
v_5	9.3	6.3	5	3	0	4.8	6.3	108.5
v_6	4.5	1.5	2.5	1.8	4.8	0	1.5	65.8
v_7	6	3	4	3.3	6.3	1.5	0	88.3
产量(千吨)	3	2	7	1	5	1	4	

此p-中心的算法问题还是一个未解决的难题。

中英名词索引

二　划

三　划

有向树子程序　Subroutine DITREE
初等变换子程序　Subroutine ET
端点变换子程序　Subroutine TERMINAL TRANS
最短路径子程序　subroutine SDKCL
各点间最短路径子程序　Subroutine SPBE
求割点子程序　Subroutine CUTND
环和子程序　Subroutine RS
删除冗余项子程序　Subroutine RE
边开路变换子程序　Subroutine EO
边短路变换子程序　Subroutine ES
节点法求网络解子程序　Subroutine NODEQ
连通度子程序　Subroutine CONY
广度优先搜索　BFS

四　划

（矩阵的）元　entry (of a metrix)
独立元　independent entries
支　component
(n-) 支　(n-) component
连通支　connected component
奇支　odd component
单侧支　unilateral component
弱支　weak component
偶支　even component
强支　strong component
中心　center
公式　formula
欧拉多面体公式　Euler polyhedron formula
欧拉网孔数公式　Euler mesh formula
方向对偶原则　Directional Duality Principle
(n-) 方体　(n-) cube
分枝　branch
分歧　ramification
双图　bigraph
完全双图　complete bigraph
比赛图　tournament
计数　enumeration
不变量　invariant
元素　element

代表元素　representative element

不可比元素　incomparable element

分离S　Separation S

分离积SP　Separation Product SP

方程　equation

欧拉-庞加莱方程　Euler-Poincare equation

树的不相似性特征方程　dissimilarity characteristic equation of trees

回路矩阵方程　loop matrix equation

节点矩阵方程　node matrix equation

割集矩阵方程　cut-set matrix equation

网孔矩阵方程　mesh matrix equation

状态方程　satate equation

基本方程　prilimary equation

辅助方程　auxiliary equation

　secondary equation

回路转换矩阵方程　LTEM

节点转换矩阵方程　NTME

割集转换矩阵方程　KTME

网孔转换矩阵方程　MTME

稀疏方程　Sparse system of equation

冗余项　redundancy term

支　路　branch

标准支路　standard branch

出支路　out branch

入支路　in branch

非对称支路　asymmetric branch

开关　switching, contact

计算机　computer

计算机辅助分析　CAA

计算机辅助设计　CAD

五　划

长度　length

匹配　matching

不可扩张匹配　nonaugmentable matching

极大匹配　maximum matching

边　edge

加上（一条线）addition (of a line)

边不相接　edge-disjoint

边不相接回路的并集　edge disjoint circuit union
边不相接割集的并集　edge disjoint cut-set union
边目录法　edge listing
边列　edge train
边序列　edge sequence
有源边　active edge
无源边　passive edge
射出边　initial edge
射入边　terminal edge
并行边　parallel edge
布尔代数　Boolean algebra
布尔运算　Boolean operation
布尔和　Boolean sum
布尔积　Boolean product
布尔变量　Boolean variable
可分性　separability
可分图　separable graph
不可分图　nonseparable graph
不可分二端图　nonseparable two terminal graph
可行遍性　traversability
可平面性（或平面性）　planarity
外可平面性　outerplanarity
可平面图（或平面图）　planar graph
可靠性　reliability
平面　plane
平面图边数不等式　inequalities of edges in planar graph
平面网络　planar network
半道路　semipath
半通道　semiwalk
半圈　semicycle
对角线　diagonal
母图　supergraph
半径　radius
可递三元组　transitive triple
边缘　boundary
（图的）半群　semigroup (of a graph)
对偶　dual
对偶性　duality
几何对偶　geometric dual

对偶网络　dual network

边-顶点对偶　edge-vertex dual

组合对偶　combinatorial dual

对偶图　dual graph

平方　square

平方根　square root

节点　node

输入节点　input node

输出节点　output node

起始节点，起点　initial node

终止节点，终点　terminal node

汇节点、汇点　sink node

源节，源点　source node

悬挂节点　hanging node

区域　region

外区域　external region

内区域　internal region

矢量　vector

边矢量　edge vector

回路组合矢量　circuit combination vector

本原回路组合矢量　primitive circuit combination vector

代数余子式　cofactor

切割　cut

对称差　symmetric difference

对称对　symmetric pair

六　划

并　union

轨　orbit

阶　order

团　clique

权　weight

（点的）权　weight (of a point)

（函数的）权　weight (of a function)

（轨的）权　weight (of an orbit)

交　intersection

导抗　immittance

有源元件　active element

回转器　gyrator

回路　circuit, loop

回路集合　circuit set

基本回路　foundamental circuit

纯电容回路　all capacitance circuit

哈密顿回路　Hamiltonian circuit

不相接触回路　disjoint circuit

回路集L　circuit set L

回路集乘积LP　circuit set product LP

k-阶回路集合　A k th-order circuit set

回溯方法　backtracing method

同构　isomorphism

1-同构　1-isomorphism

2-同构　2-isomorphism

同号式　unisignant

同胚　homeomorphism

同胚象　homeomorph

网络　network

无源网络　passive network

有源网络　active network

单口网络　one port network

双口网络　two port network

定阻网络　constant resistance network

无源无互感网络　passive network without mutual inductance

退化网络　degenerate network

常态网络　proper network

非最小相位网络　nonminimum phase network

抗损网络　demage resistant network

共地网络　common ground network

非平衡网络　unbalanced network

开关网络　switching network

双互补开关网络　SP network

单触点开关网络　SC network

多触点开关网络　MC network

网络流，流量网络　network flow

网孔　mesh

外网孔　outside mesh

全等　congruence

列　column

行　row

片，连通片　component

行列式　determinant

　节点导纳行列式　node admittance determinant

　回路阻抗行列式　loop impedance determinant

自环，自回路　self-loop

自由度　degree of freedom

系统的阶　order of system

多项式可归约　polynomial related

因子　factor

　(n-) 因子　(n-) factor

因子分解　factorization

　(n-) 因子分解　(n-) factorization

划分　partition

　图划分　graphical partition

　(属于一个图的) 划分　partition (of a graph)

　简单的图划分　simple graphical partition

曲面　surface

　可定向的曲面　orientable surface

合成　composition

自动机　automata

有向图　oriented graph, directed graph

　不连通有向图　disconnected digraph

　无圈有向图　acyclic digraph

　平凡有向图　trivial digraph

　本原有向图　primitive digraph

　可迁有向图　transitive digraph

　对称有向图　symmetric digraph

　自补有向图　self-complement digraph

　有源的有向图　digraph with a source

　自逆的有向图　self-converse digraph

　同谱有向图　cospectral digraph

　严格单侧有向图　strictly unilateral bigraph

　严格弱有向图　strictly weak digraph

　线有向图　line digraph

　伴随有向图　assiciated digraph

　加权有向图　weighted digraph

　单侧有向图　unilateral digraph

　函数有向图　functional digraph

　单侧连通有向图　unilateral connected digraph

逆有向图　converse

欧拉有向图　Eulerian digraph

标定可迁有向图　labeled transitive digraph

逆函数有向图　contrafunctional digraph

弱有向图　weak digraph

弱连通有向图　weakly connected digraph

强有向图　strong digraph

强连通有向图　strongly connecteb digraph

自同构　automorphism

自同态　endmorphism

恒等自同态　identity endmorphism

初等自同态　elementary homomorphism

同态　homomorphism

n-阶完全同态　complete homomorphism of order n

同态象　homomorphic image

色多项式　chromatic polynomial

地图　map

平面地图　plane map

有边根的平面地图　edgerooted plane map

补图　complement

相对补图　relative complement

导图　derivative

伪图　pseudograph

色组　color class

级数　series

构形计数级数　configeration counting series

图形计数级数　figure counting series

多重图　multigraph

后继　successor

传递的性质　hereditary property

关联的　incident

收缩　contraction

初等收缩　elementary contraction

问题　problem

匹配问题　matching problem

拉姆齐问题　Ramsey problem

项链问题　necklace prolem

哥尼斯堡七桥问题　Könisberg bridges problem

推销员问题　traveling salesman problem

NP-完全问题　NP-complete problem
标准布尔方程解问题　satisfiability problem
胞腔生长问题　cell growth problem

七　划

拟图　graphoid
拟阵　matroid
　二部拟阵　bipartite matroid
　二元拟阵　binary matroid
　自对偶拟阵　self-dual matroid
　余图拟阵　cographical matroid
　余圈拟阵　cocycle matroid
　图拟阵　graphical matroid
　圈拟阵　cycle matroid
　欧拉拟阵　eulerian matroid
　旋拟阵　whirl
块　block
杈　twig
形心　centroid
围长　girth
邻元素　neighbors
余回路　cocircuit
余树　cotree
连通度　connectivity
　局部连通度　local connectivity
　线连通度　line-connectivity
　点连通度　point connectivity
　边连通度　edge connectivity
　连通度对　connectivity pair
　节点连通度　node connectivity
　2-连通　biconnected
　3-连通　triconnected
连通顶点集合　connected vertex set
连通性　connectedness
连接　connection
　单-连接　one-connection
连支　link, chord
状态变量　state variable
穷举法　exhaust algorithm

邻域　neighborhood
闭邻域　closed neighborhood
邻接的　adjacent
邻接性　adjacency
阻塞　block
传输零点　zero of transmission
邻接编目法　adjacency vertex listing
邻接顺序法　successor listing

八　划

图　graph
　线形图，线图　linear graph
　正则图　regular graph
　连通图　connected graph
　不连通图　disconnected graph
　简单图　simple graph
　有限图　finite graph
　无限图　infinite graph
　补图　complement of a subgraph
　空图　null graph
　完备图　complete graph
　二分（部）图　bipartite graph
　完备二分图　complete bipartite graph
　流图G_C　flow graph G_C
　　Coates图G_C　Coates graph G_C
　　信号流图G_M　signal flow graph G_M
　　Mason图G_M　Mason graph G_M
　　改进Coates图片G_L　improved Coates graph G_L
　　陈-麦图G_S　Chan-Mai graph G_S
　混合图　composite graph
　关系图　relationship graph
　拓扑图　topological graph
　几何图　geometrical graph
　冷　图　cold graph
　加权图　weighted graph
　概率图　probability graph
　欧拉图　Eularian graph
　哈密顿图　Hamiltonian graph
　框图，流程图　flow chart

(e-) 图	(e-) graph
(p, q) 图	(p, q) graph
(θ-) 图	theta graph
幺图	identity graph
三次图	cubic graph
不可分图	nonseparable graph
点临界图	point-critical graph
线临界图	line critical graph
彼得森图	Petersen graph
单圈图	unicyclic graph
极端图	extremal graph
点对称图	point-symmetric graph
复合图	composite graph
星形图	star graph
标定图	labeled graph
欧拉图	Eulerian graph
哈密顿图	Hamiltonian graph
柏拉图图	Platonic graph
指定符号的图	signed graph
素图	prime graph
可约图	reducible graph
不可约图	irreducible graph
(n-) 可迁图	(n-) transitive graph
(n-) 可因子化图	(n-) factorable graph
可收缩的图	contractible graph
区间图	interval graph
(n-) 可着色图	(n-) colorable graph
对偶图	dual graph
色图	color graph
(n-) 色图	(n-) chromatic graph
最大可平面图	maximal planar graph
最大不可平面图	maximal outerplanar graph
割点图	cutpoint graph
迭线图	iterated line graph
迭置图	superposed graph
戴维图	David graph
覆盖图	covering graph
希伍德图	Heawood graph
块-割点图	block-cutpoint graph

空图　empty graph
定向图　oriented graph
线正则图　line-regular graph
线对称图　line symmetric graph
线有根图　line-rooted graph
定向图　oriented graph
轮形图　wheel
麦克吉图　Mcgee graph
双色图　bicolorable graph
环环图　toroidal graph
互素的图　relatively prime graph
双根图　doubly rooted graph
无圈图　acyclic graph
半不可约图　semi-irreducible graph
平面图　plane graph
可平面图　planar graph
外平面图　outerplane graph
外可平面图　outerplanar graph
可（由-点v）任意行遍的图　arbitrarily traversable graph
细分图　subdivision graph
高度对称图　highly symmetric graph
唯一可着色图　uniquely colorable graph
唯一n-可着色图　uniquely n-colorable graph
基本图　underlying graph
随意可遍图　randomly traceable graph
随意哈密顿图　randomly Hamiltonian graph
（α-）置换图　（α-）Permutation graph
勒维图　Levi graph
（X-）最小图　（X-）minimal graph
交图　intersection graph
全图　total graph
导出图　derived graph
自补图　self-complementary graph
同构图　isomorphic graph
色临界图　color-critical graph
托特图　Tutte graph
交换图　interchange graph
同谱图　cospectral graph
依附图　adjoint graph

直径 diameter

林 forest

和 sum

直接和 direct sum

线 line

(矩阵的) 线 line (of a matrix)

对称线 symmetric line

有向线 directed line

多重线 multiple lines

相似线 similar lines

临界线 critical line

端线 endline

弧 arc

多重弧 multiple arcs

弦 chord

函数 function

布尔函数 Boolian function

生成函数 generation function

权函数 weight function

连通度函数 connectivity function

拉姆齐函数 Ramsey function

开关函数 switching function

计算复杂性函数 computational complexity function

第动点阻抗函数 driving-point impedance funtion

第动点导纳函数 driving-point admittance function

开路阻抗函数 open-circuit impedance function

短路导纳函数 short-circuit admittance function

组合理论 combinatorial theory

环柄 handle

顶点 vertex

端顶点endvertex

图解 diagram

海塞图解 Hasse diagam

传真图解 teleprinter diagram

周期序列 periodic sequence

环 loop

补树 cotree

变量 variable

变换 transformaton

端点变换 terminal transformation

边开路变换 edge open transformation

边短路变换 edge short transformation

初等变换 elementary transformation

环和 ring sum

奇环和 odd ring sum

偶环和 even ring sum

奇环和条件 odd ringsum condition

顶点 Vertex

父顶点 father vertex

子顶点 son vertex

前代顶点 ascendant vertex

后续顶点 descendant vertex

非奇异 nonsingular

非冗余 nonredundant

非零大子式 nonvanish major

拓扑系 topology

拓扑综合 topological syuthesis

林 forest

拟阵 matroid

固有频率 natural frequency

图灵机 Turing machine

非确定性图灵机 nondeterministic Turing machine

定理 theorem

(BEST) 定理 (BEST) theorem

四色定理 fiur-color theorem

五色定理 five-color theorem

多面体定理 theorem of polyhedra

有向图的"矩阵-树"定理 "matrix-tree" theorem of digraph

同态内插定理 homemorphism interpolation theorem

希伍德地图着色定理 Heawood map-coloring theorem

库拉托夫斯基定理 Kuratowski's theorem

波立亚计数定理 Pólya's enumeration theorem

明格尔定理 Menger's theorem

变元"矩阵-树"定理variable "matrix-tree" theorem

"矩阵-树"定理 "matrix-tree" theorem

宾纳-柯西定理 Binet-cauchy theorem

"最大流-最小截"定理 "max-flow min-cut" theorem

幂群计数定理 Power group enumeration theorem

戴维宁定理 Thevinin theorem

九 划

度 degree

出度 out going degree

入度 in coming degree

(线的) 度 degree (of a line)

点 point

中心点 central point

不动点 fixed point

(由一点v_0) 可达的点reachable point (from a point v_0)

形心点 centroid point

周点 peripheral point

孤立点 isolated point

相似点 similar point

临界点 critical point

端点 endpoint, terminal

迹 trace

可扩张M-迹 augmenting M trace

交替迹alternating trace

交替M-迹 alternating M-trace

欧拉迹 eulerian trace

树 tree

入树 in-tree

么树 identity tree

么有根树identity rooted tree

无端标定endlessly rooted tree

出树 out-tree

平面树 plane tree

有向树 directed tree

有根树 rooted tree

同胚不可约树 homeomorphically irreducible tree

块一割点树 block-cut point tree

定向树 oriented tree

指定符号的树 signed tree

植树 planted tree

着色树 colored tree

树支 tree branch

常态树 proper tree

正规树 normal tree
中心树 centre tree
最小树 minimal tree
最小连接树 steiner tree
DFS树 DFS tree
2-树 2-tree
k-树 k-tree
k-树组 k-tree term
星形树 star tree
线形树 linear tree
树支导纳乘积 tree branch admittance product
求树法 tree approach
面 face
无限面 unbounded face
外部面 exterior face
栈 stack
核 core
线核 line core
点核 point core
冠 corona
结合 conjunction
测地线 geodesic
星多边形 stared polygon
树多项式 tree polynomial
复形 complex
单纯复形 simplicial complex
度量 metric
度量空间 metric space
重构 reconstruction
稳定核 stabilizer
(1-)骨架 (1-) skelaton
荫度 arboricity
厚度 thickness
复杂度 order of complexity
测地投影 stereographic projection
点法 dot method
弧 arc
映射 mapping
恒等式 identity

2-树恒等式 2-tree identity
指纹模式 fringerprint pattern

十 划

流 flow
极大流 maximum flow
最小费用流 minimum cost flow
桥bridge
格lattice
2-格 2-lattice
3-格 3-lattice
积 product
字典式积 lexicographic product
直接积 direct product
张量积 tensor product
按元素的积 elementwise product
笛卡儿积 catesian product
秩 rank
余圈秩 cocycle rank
圈秩 cycle rank
根 root
离心率 eccentricity
特征多项式 characteristic polynomial
递降阶乘 falling factorial
啄食次序 pecking orders
通道 walk
开通道 open walk
生成通道 spanning walk
闭通道 closed walk
交替Y--通道 alternating Y-walk
(Y-)缩减通道 (Y-) reduced walk
矩阵 matrix
子矩阵 submatrix matrix
关联矩阵 incidence matrix
关联子矩阵 incidence submatrix
缩减关联矩阵 reduced incidence matrix
回路矩阵 circuit matrix
回路子矩阵 circuit submatrix
基本回路矩阵 foundemental circuit matrix

邻接矩阵 adjacency matrix
边递增回路矩阵 edge ordered circuit matrix
割集矩阵 cutset matrix
割集子矩阵 cutset submatrix
基本割集矩阵 foundemental cutset matrix
路径矩阵 path matrix
连接矩阵 connected matrix
距离矩阵 distance matrix
标记矩阵 marked matrix
权矩阵 weight matrix
稀疏矩阵 sparse matrix
二元矩阵 binary matrix
可达性矩阵 reachability matrix
迂回矩阵 detour matrix
余圈矩阵 cocycle matrix
缩减余圈矩阵 reduced cocycle matrix
圈矩阵 cycle matrix
缩减圈矩阵 reduced cycle matrix
节点导纳矩阵 node admittance matrix
不定导纳矩阵 indefinite admittance matrix
支路导纳矩阵 branch admittance matrix
等代数余子式矩阵 equicofactor matrix
有向树矩阵 directed tree matrix
端点容量矩阵 terminal capacity matrix
支路容量矩阵 branch capacity matrix
倒电容 elastance
倍压器 doubler circuit

十 划

圈 cycle
圈向量 cycle vector
基 basis
(1-) 基 (1-) basis
余圈基 cocycle basis
点基 point basis
圈基 cycle basis
(n-) 笼 (n-) cage
深度优生搜索DFS
得分 Score

移去（一条线，一个点） removal (of a line, a point)

着色 coloring

着色数 chromatic number

（n-）着色 (n-) coloring

（平面地图的）着色 coloring (of a plane map)

至多t色的着色 coloring from t colors

完全着色 complete coloring

线着色 line coloring

（n-）线着色 (n-) line coloring

猜想Conjecture

四色猜想four-color conjecture

希伍德猜想 Heawood's conjecture

里德猜想 Read's conjecture

哈德维格尔猜想 Hadwiger's conjecture

乌拉姆猜想 Ulam's conjecture

泰特猜想 Tait's conjecture

普卢默猜想 Plumer's conjecture

维数 dimension

捷径 cutshort

偏斜度 skewness

兽图 animal

十二　划

链 chain

单纯链 simple chain

初等链 elementary chain

（0-）链 (0-) chain

（1-）链 (1-) chain

（格的）链 chain (of a lattice)

缘 rim

有辐的缘 spoked rim

联 join

集 set

子集 subset

不变量的完全集 complete set of invariants

（线、点的）独立集 independent set (of lines, points)

真子集 proper subset

道路 path

不相交道路 disjoint paths

线一不相交道路 line-disjoint paths
点一不相交道路 point-disjoint paths
割点 cut vertex(node)
割线 cut line
割集 cutset
纯电感割集 all inductance cutset
顶点割集 vertex cutset
基本割集 foundamental cutset
断片 fragment
根 root
Icosian游戏 Icosian gam
最小化 minimality
最小相位 minimum phase
最小反馈边集合 minimum feedback edge set
等价 equivalence
嵌入 embedding
最大流 maximal flow
循环三元组 cyclic triple
循环指标 cycle index
循环标定 cyclic labeling
铺砌 paving
距离 distance

十三 划

(n-)路 (n-) route
数 number
贝蒂数 Betti number
交数 intersection number
线拉姆齐数 line Ramsey number
线独立数 line independence number
线覆盖数 line covering number
点独立数 point independence number
点覆盖数 point covering number
消色数 achromatic number
叉数 crossing number
源 source
群 group
二面体群 dihedral group
对群 Pair group

对称群　symmetric group
约化有序对群　reduced ordered pair group
交代群　alternating group
同构的群　isomorphic groups
克莱茵四群　Klein four group
线群　line-group
构形群　configuration group
单位元素群　identity group
点群　point-group
指数群　exponentiationgroup
恒等的置换群identical permutation groups
循环群　cyclic group
幂群　power group
置换　permutation
源　source
零点　zero
零度　nullity
窗口　window
路径　path
最短路径　shortest path
独立路径集合　independant path set
O-路径　O-path
路径乘积　path product
路径集合　path set
环闭路径　closure path
正向路径　forward path
欧拉路径　Eularian path
哈密顿路径　Hamiltonian path

十四　划以上

增益　gain
增益公式　gain formula
支路增益　branch gain
路径增益　path gain
回路增益　circuit gain
单连接增益　one-connection gain
连接增益　connection gain
概率　probability
阻塞概率　block probability

概率流 probability flow

算子 operator

上边缘算子 coboundary operator

边缘算子 boundary operator

粗度 coarseness

（图的）幂 power (of a graph)

凝聚 condensation

覆盖 covering

外部的极小点覆盖 external minimum point covering

极小线覆盖 minimum line covering

极小点覆盖 minimum point covering

线覆盖 line covering

点覆盖 point covering

算法 algorithm

有效算法 efficient algorithm

多项式复杂性算法 polynomial complexity algorithm

指数复杂性算法 exponential complexity algorithm

找树算法 tree finding algorithm

平面性判定算法 planarity testing algorithm

Dunn和陈树柏算法 Dunn and chan's algorithm

Hopcroft和Tarjan算法 Hopcroft and Tarjan's algorthm

Minty算法 Minty algorithm

Read的可分性算法 Read algorithm

连通性判定算法 connectedness testing algorithm

Paton的求基本回路算法 Paton's fundamental circuit finding algorithm

DFS算法 DFS algorithm

Tarjan算法 Tarjan's algorithm

两点间最短路径算法 algorithm of shortest path between two vertice

各点间最短路径算法 shortest pathes algorithm

求最小树算法 min-tree finding algorithm

Kruskal算法 Kruskal's algorithm

开关网络综合算法 synthesis of switching network algorithm

R-树组算法 p-tree term algorithm

流图算法 flow graph algorithm

生成B_a, Q_a矩阵算法 generation B_a, Q_a matrice algorithm

主要参考书目

[1]F.Harary, Graph Theory, 1969.

[2]J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory With Applications, 1976.

[3]C. Berge, Graphs and Hypergraphs, 1973.

[4]W. Mayeda, Graph Theory, 1972

[5]Y. Alari and D.R. Lick, Theory and Applications of Graphs, 1978.

[6]D.E. Johnson and J.R. Johnson, Graph Theory With Engineering Applications, 1972

[7]B. Bollobas, Extremal Graph Theory.

[8]D. König, Theorie der Endlichen und unendlichen Graphen.

[9]H.J. Ryser, Combinatorial Mathematics.

[10]M. Capobianco, J.C. Molluzzo, Examples and Counterexamples in Graph Theory.

[11]P. Camion, characterization of totally unimodular Matrices. Proc. Ann. Math. soc. 16 (1968) 1068-1073.

[12] C. 贝尔热著，李修睦译，《图论及其应用》，1963.

[13] 陈树柏主编，左垲、张良震副主编，《网络图论及其应用》，科学出版社,1932

[14] 王朝瑞编，《图论》，人民教育出版社，1981.

[15] 卢开澄著，《图论及其应用》，清华大学出版社，1981.

[16] 邵关源编，《网络图论简介》，人民教育出版社，1978.

[17] 李修睦著，《图论导引》华中工学院出版社，1982.

[18] F. 哈拉里著，李慰萱译，《图论》，上海科学技术出版社.